ВЕСОВОЕ НЕРАВЕНСТВО И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Ойнаров Р.[1]

[1]Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева. г. Астана, Казахстан
[1]E-mail:o_ryskul@mail.ru

Пусть $T > 0$, $I = (T, \infty)$ и $1 < p, q < \infty$. Пусть r, υ и u — неотрицательные функции, такие, что r непрерывно дифференцируема, u и υ локально суммируемы на интервале I. Кроме того, пусть $r^{-1} \equiv \frac{1}{r} \in L_1^{loc}(I)$, $\upsilon^{-p'} \in L_1^{loc}(I)$ и $p' = \frac{p}{p-1}$. Пусть $D_r^2 f(t) = \frac{d}{dt} r(t) \frac{df(t)}{dt}$ и $C^\infty 0(I)$ — множество функций с компактным носителем, бесконечно непрерывно дифференцируемых на I. Предположим, что $Dr^1 f(t) = r(t)\frac{df(t)}{dt}$. Мы будем исследовать осцилляторные свойства дифференциального уравнения

$$D_r^2\big(\upsilon(t) D_r^2 y(t)\big) - u(t)y(t) = 0,\ t > T, \tag{1}$$

и спектральные свойства дифференциального оператора L, который генерируется дифференциальным выражением

$$Ly(t) = \frac{1}{u(t)} D_r^2\big(\upsilon(t) D^2 y(t)\big), \tag{2}$$

используя результаты по неравенство

$$\left(\int\limits_T^\infty \big|u(t)f(t)\big|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \le C_T \left(\int\limits_T^\infty \big|\upsilon(t) D_r^2 f(t)\big|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},\ f \in C_0^\infty(I). \tag{3}$$

Две точки t_1 и t_2, такие, что $t_1 \neq t_2$ интервала I, называются сопряженными относительно уравнения (1), если существует решение y уравнения (1) такое, что $y(t_1) = y_2(t_2) = 0$ и $D_r^1 y(t_1) = D_r^1 y(t_2) = 0$. Уравнение (1) называется колеблющимся на бесконечности, если для любого $T \in I$ существуют сопряженные точки относительно уравнения (1) справа от T. В противном случае уравнение (1) называется неколеблющимся на бесконечности.

В ряде работ исследуются осцилляторные свойства уравнений четвертого и более высоких порядков тремя методами. Первый метод рассматривает эти уравнения как возмущения уравнений типа Эйлера с известными решениями. Второй метод основан на сведении уравнений к гамильтоновым системам. Третий метод, применимый только к симметричным уравнениям, анализирует их осцилляторные свойства с помощью вариационного принципа, что требует установления неравенства (3).

Свойство BD (см. [1]), которое относится к ограниченности снизу и дискретности спектра оператора L, порожденного дифференциальным выражением (2), связано с неколеблемостью дифференциального уравнения (1). Оценка первого собственного значения L следует из оценки наименьшей константы в неравенстве (3). Кроме того, поскольку дифференциальное уравнение (1) симметрично, вариационный принцип (см. [2]) устанавливает связь между его осцилляторными свойствами и неравенством (3). Таким образом, в данной работе мы обсуждаем три взаимосвязанные задачи, анализируя их на основе степени сингулярности функций $v^{-p'}$ и r^{-1} на бесконечности.

Свойство BD (см. [1]), которое относится к ограниченности снизу и дискретности спектра оператора L, порожденного дифференциальным выражением (2), связано с неколеблемостью дифференциального уравнения (1). Оценка первого собственного значения L следует из оценки наименьшей константы в неравенстве (3). Кроме того, поскольку дифференциальное уравнение (1) симметрично, вариационный принцип (см. [2]) устанавливает связь между его осцилляторными свойствами и неравенством (3). Таким образом, в данной работе мы обсуждаем три взаимосвязанные задачи, анализируя их на основе степени сингулярности функций $v^{-p'}$ и r^{-1} на бесконечности. Рассмотрим уравнение (1) с параметром $\lambda > 0$

$$D_r^2\Big(v(t)D_r^2y(t)\Big) - \lambda u(t)y(t) = 0,\ t \in I. \tag{4}$$

Уравнение (4) называется сильно осцилляторным (неосцилляторным) на бесконечности, если оно является осцилляторным (неосцилляторным) для всех $\lambda > 0$ на бесконечности.

Лемма 1. *Пусть C_T будет наименьшей константой в* (3).
(i) Уравнение (4) *является сильно неосцилляторным на бесконечности тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{T\to\infty} C_T = 0$.
(ii) Уравнение (4) *является сильно осцилляторным на бесконечности тогда и только тогда, когда $C_T = \infty$ для любого $T > 0$.*

Пусть минимальный дифференциальный оператор $L_{\min}$ порождается дифференциальным выражением (2) в пространстве $L_{2,u} \equiv L_2(u; I)$ со скалярным произведением $(f,g)_{2,u} = \int\limits_0^\infty f(t)g(t)u(t)dt$, т.е. $L_{\min}y = Ly$ – оператор с областью определения $D(L_{\min}) = C_0^\infty(I)$. Известно, что все самосопряженные расширения минимального дифференциального оператора L имеют одинаковые спектры (см. [2]). Рассмотрим вопрос об ограниченности снизу и дискретности спектра оператора L. Связь между осцилляторными свойствами уравнения (4) и спектральными свойствами оператора L приведена в следующем утверждении.

Лемма 2 ([2]). *Оператор L ограничен снизу и имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда уравнение* (4) *является сильно неосцилляторно.*

Сначала мы устанавливаем критерии выполнения неравенства (3) в терминах функций r, v и u, дающие двустороннюю оценку для наилучшей константы C_T. Затем, используя Лемму 1 и Лемму 2, мы последовательно выводим критерии сильной неосцилляторность уравнения (4) и соответствующие спектральные свойства оператора L.

Список литературы

[1] Hinton, D.B., Lewis, R.T, iscrete spectra criteria for singular differential operators with middle terms. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 77, 1975,p. 337—347.

[2] Glazman, I.M., Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators; Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit.: Moscow, Russia, 1963.