УДК 519.95

Д.Г.Валиева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail:dinara.vg@mail.ru)

Об автономных системах на плоскости и предельных циклах

В статье изучены вопросы устойчивости непрерывных гладких решений автономных систем и систем дифференциальных уравнений первого порядка в общем виде по первому приближению. Анализ устойчивости непосредственно связан с определением условий равновесия и выяснения устойчивости предельных циклов. Автором исследована асимптотическая устойчивость периодического решения системы в зависимости от значений мультипликаторов. Рассмотрены пример и смешанный случай.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, устойчивость по первому приближению, автономная система, предельные циклы, автоколебания, мультипликаторы.

Рассмотрим автономную двумерную систему

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $f \in C^1(H)$; $H \subset R^2$ — область.

Предположим, что система (1) имеет замкнутую траекторию γ с наименьшим периодом $\omega > 0$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in \gamma$ и проведем через нее нормаль n к γ единичной длины. Для определенности считаем, что нормаль n направлена во внешнюю область. Не нарушая общности, считаем также, что x_0 — начало координат (этого можно добиться заменой $y = x - x_0$). Точки на нормали n определяются единственной координатой ρ. В качестве ρ берем расстояние от точки нормали до начала координат, если точка лежит снаружи γ, и это расстояние, взятое с обратным знаком, если она лежит внутри γ.

Рассмотрим траектории $\varphi(t, \rho n)$, проходящие через точки нормали. Запишем уравнение

$$\Phi(t, s, \rho) = \varphi(t, \rho n) - sn = 0 \tag{2}$$

с неизвестными t, s [1].

Лемма. Существует $\Delta > 0$ такое, что в области $|\rho| < \Delta$ уравнение (2) имеет единственное решение $t = T(\rho)$, $s = g(\rho)$, удовлетворяющее условиям $T(0) = \omega$, $g(0) = 0$, причем функции $T(\rho)$, $g(\rho)$ непрерывно дифференцируемы при $|\rho| < \Delta$.

Доказательство. Так как $\varphi(t, 0)$ — решение с периодом T, то по теореме о дифференцируемости решения функция $\varphi(t, \rho n)$ определена и непрерывно дифференцируема по t и ρ в некоторой окрестности точки $t = \omega$, $\rho = 0$. Тогда функция $\Phi(t, s, \rho)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(\omega, 0, 0)$. Так как $\varphi(t, 0)$ T-периодична, то $\Phi(\omega, 0, 0) = 0$. Рассмотрим якобиан

$$J = \det\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)$$

в точке $(\omega, 0, 0)$. Имеем

$$J = \det\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, -n\right) = \det(f(\varphi(t, \rho n)), -n).$$

Следовательно, в точке $(\omega, 0, 0)$

$$J = \det(f(0), -n) \neq 0,$$

поскольку $f(0)$ и n — ортогональные векторы. Тогда утверждение леммы вытекает из теоремы о неявной функции.

Следствие. Справедлива формула

$$g'(0)=\exp\left\{\int_0^{\omega} sp\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t,0))dt\right\}.$$

Выясним геометрический смысл функций $T(\rho)$, $g(\rho)$. Лемма утверждает, что каждая траектория, пересекающая нормаль *n* в точке ρn из γ-окрестности начала координат, вновь пересечет ее через промежуток времени $T(\rho)$ в точке $g(\rho)n$. При этом так как функция $\varphi(t,\rho n)$ делает полный оборот вдоль γ при $t\in[0,\omega]$, то траектория $\varphi(t,\rho n)$ также делает полный оборот при $t\in[0,T(\rho)]$, оставаясь в малой окрестности γ, если γ достаточно мало (рис. 1).

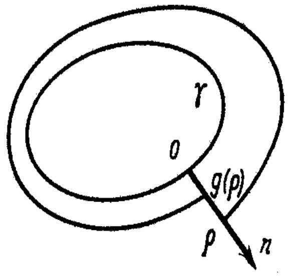

Рисунок 1. Геометрический смысл функций $T(\rho), g(\rho)$

Замкнутая траектория γ автономного уравнения (1) называется *устойчивым предельным циклом*, если существует такое $\Delta>0$, что γ является предельным множеством для любой траектории, проходящей через точку из окрестности кривой γ.

Замкнутая траектория γ автономного уравнения (1) *называется неустойчивым предельным циклом*, если существует такое $\Delta>0$, что γ является предельным множеством для любой траектории, проходящей через точку из окрестности кривой γ.

Так как в реальной действительности время течет в положительном направлении, то на практике реализуются те периодические движения, которым соответствуют устойчивые предельные циклы. Такие движения называются *автоколебаниями* [2].

Теорема 1. Пусть

$$h=\int_0^{\omega} sp\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t,0))dt.$$

Если $h<0$, *то* γ *является устойчивым предельным циклом; если* $h>0$, *то* γ *— неустойчивый предельный цикл* [3].

Характер приближения соседних траекторий к γ при $t\to\infty$ следующий: они приближаются к γ, образуя бесконечное число витков спирали, как изнутри, так и снаружи (рис. 2).

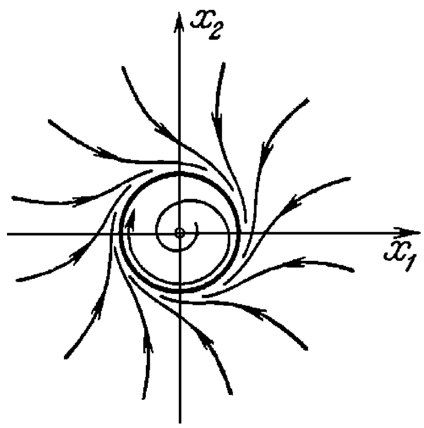

Рисунок 2. Устойчивость по первому приближению

Рассмотрим уравнение $\dot{x} = f(t,x)$, где $f \in C_x^1(G)$. После замены $y = x - \overline{x}(t)$ получим уравнение, которое, используя разложение в ряд Тейлора, запишем в виде

$$\dot{y} = A(t)y + g(t,y), \tag{3}$$

где

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(t, \overline{x}(t)\right), \ \frac{\|g(t,y)\|}{\|y\|} \to 0 \text{ при } \|y\| \to 0. \tag{4}$$

Теорема 2. Пусть A — постоянная матрица, предельный переход в (4) выполняется равномерно по $t \in \left[t_0, \infty\right)$ и вещественные части собственных чисел матрицы A отрицательны. Тогда решение $y = 0$ уравнения (3) асимптотически устойчиво.

Теорема 3. Пусть A — постоянная матрица, предельный переход в (4) выполняется равномерно по $t \in [t_0, \infty)$. Для устойчивости, по Ляпунову, нулевого решения уравнения (3) необходимо, чтобы вещественные части собственных чисел матрицы A были неположительны.

Рассмотрим теперь иное автономное уравнение

$$\dot{x} = f(x), \tag{5}$$

где функция f непрерывно дифференцируема при $\|x - \overline{x}\| < \delta^*$, причем $f(\overline{x}) = 0$. Тогда $x = \overline{x}$ является положением равновесия уравнения (5). После замены $y = x - \overline{x}$ уравнение (5) принимает вид

$$\dot{y} = Ay + g(y),$$

где $A = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x})$, функция $g(y)$ непрерывно дифференцируема при $\|y\| < \delta^*$ и

$$\frac{\|g(y)\|}{\|y\|} \to 0 \text{ при } \|y\| \to 0. \tag{6}$$

Из (6) и теорем 2 и 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. Если все собственные числа матрицы $\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x})$ имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия $\overline{x}$ асимптотически устойчиво; если же хоть одно из собственных чисел имеет положительную вещественную часть, то оно неустойчиво [3].

Рассмотрим систему двух уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2;$$
$$\dot{x}_2 = \cos(x_1 + x_2).$$

Координаты положений равновесия определяются из уравнений

$$x_2 = 0, \ \cos(x_1 + x_2) = 0.$$

Положения равновесия таковы

$$\overline{x}^k = \left(\frac{\pi}{2}(2k+1), 0\right), \ k \in Z.$$

Соответствующие матрицы $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\overline{x}^k\right)$ имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\overline{x}^k\right) = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin(x_1 + x_2) & -\sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}\right|_{x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1), \ x_2 = 0},$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\overline{x}^k\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & (-1)^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Собственные числа определяются уравнением

$$\lambda^2 + (-1)^k \lambda + (-1)^k = 0.$$

При k четном — $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$, при k нечетном — $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

По теореме 4 при k четном решения $\overline{x}^k$ асимптотически устойчивы, а при k нечетном — неустойчивы.

Предположим теперь, что правая часть уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ и решение $\overline{x}(t)$ периодичны по t с одним и тем же периодом. Тогда в уравнении (3)

$$A(t+\omega) = A(t),\ g(t+\omega, y) = g(t, y).$$

Далее, так как функция $g(t, y)$ равномерно непрерывна на компакте $\{(t, y) : t \in [t_0, t_0+\omega], \|y\| \le 1/2\delta^*\}$, то в силу периодичности

$$g(t, y)\|y(t, y_0)\| \to 0$$

выполняется равномерно по $t \in [t_0, \infty)$. Поскольку $A(t)$— периодическая матрица, то существует замена переменных

$$y = G(t)z, \tag{7}$$

где $G : R \to \Re^{n,n}$ — периодическая с периодом T функция класса C^1, причем $\det G(t) \ne 0$, переводящая уравнение $\dot{y} = A(t)y$ в $\dot{z} = Rz$ с постоянной матрицей коэффициентов R, определяемой теоремой Флоке. Следовательно, замена (7) переводит (3) в уравнение

$$\dot{z} = Rz + \tilde{g}(t, z), \tag{8}$$

причем функция $\tilde{g}(t, z) = G^{-1}g(t, Gz)$ определена и непрерывна в области вида U^*. Условие (4) также выполняется. Действительно,

$$\frac{\|\tilde{g}(t, z)\|}{\|z\|} \le \frac{n^2\|G\| \cdot \|G^{-1}\| \cdot \|g(t, Gz)\|}{\|Gz\|} \xrightarrow[\|Gz\| \to 0]{} 0$$

в силу (4), ограниченности G и G^{-1} и поскольку $\|z\| \to 0$ эквивалентно $\|Gz\| \to 0$. При этом, как уже отмечалось, имеет место равномерность по t.

Здесь вопрос об устойчивости тривиального решения уравнения (3) эквивалентен вопросу об устойчивости тривиального решения уравнения (8). Так как

$$\lambda_k = \omega^{-1}\mathrm{Ln}\mu_k,$$

где λ_k— собственные числа матрицы R, а μ_k— *мультипликаторы* линейного уравнения $\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \overline{x}(t))y$, называемые также мультипликаторами периодического решения $\overline{x}(t)$, то из теорем 2 и 3 вытекает следующая теорема.

Теорема. Если модули всех мультипликаторов периодического решения периодического уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ меньше единицы, то это решение асимптотически устойчиво. Если же модуль хоть одного из мультипликаторов больше единицы, то решение неустойчиво.

Рассмотрим смешанный случай, когда исследуется устойчивость T-периодического решения $\overline{x}(t)$ автономного уравнения (5). Дифференцируя тождество $\dot{\overline{x}} = f(\overline{x}(t))$, получаем

$$\ddot{\overline{x}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}(t))\dot{\overline{x}}(t).$$

Следовательно, функция $\ddot{\overline{x}}(t)$ является T-периодическим решением уравнения в вариациях $\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \overline{x}(t))y$, причем один из мультипликаторов равен единице. Если среди остальных мультипликаторов имеются такие, модули которых больше единицы, то решение $\overline{x}(t)$ по теореме неустойчиво. В противном случае данная теорема неприменима.

Список литературы

1 *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 223 с.

2 *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

3 *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. — М.: Наука, 1971. — 288 с.

Д.Г.Валиева

Шектік циклдар мен жазықтықта автономды жүйелер туралы

Мақалада автономды жүйелердің үзіліссіз тегіс шешімдерінің және бірінші ретті дифференциалдық жүйелер теңдеулерінің бірінші жуықтаудың жалпы түрінде тұрақтылық сұрағы қарастырылған. Тұрақтылықтың талдауы шеттік циклдарының тұрақтылығы мен теңдігінің шартын анықтаумен байланысты. Сонымен қатар периодты шешімдер жүйесінің асимптоталық тұрақтылығы мультипликаторлар мәнінен тәуелділігі зерттелген. Қосымша ретінде нақты мысал мен аралас жағдай келтірілген.

D.G.Valiyeva

On the autonomous systems on a plane and limit cycles

In the given article we have considered questions of the stability of continuous and smooth solutions of autonomous systems and of systems of first order differential equations in a general form in the first approximation. Analysis of stability is directly connected with the definition of the conditions of equilibrium and with the finding of stability of limit cycles. In this article also the asymptotic stability of periodical solution of system depending on the values of multipliers is explored. The example and mixed case are considered.

References

1 Barbashin E.A. *Introduction to the theory of stability*, Moscow: Nauka, 1967, 223 p.
2 Demidovich B.P. *Lectures on mathematical theory of stability*, Moscow: Nauka, 1967, 472 p.
3 Rozo M. *Nonlinear vibrations and the theory of stability*, Moscow: Nauka, 1971, 288 p.