

- 8 Sokolovskii V.B. *On a Generalization of the Neumann Problem* // *Differentsial'nye Uravneniya*, 1988, vol. 24, No. 4, p. 714–716.
- 9 Bitsadze A.V. *On the Neumann Problem for Harmonic Functions* // *Dokl. AN SSSR*, 1990, vol. 311, No. 1, p. 11–13.
- 10 Turmetov B.Kh. *On a boundary value problem for the harmonic equation* // *Differential Equations*, 1996, vol. 32, No. 8, p. 1093–1096.
- 11 Turmetov B.Kh. *On smoothness of a solution to a boundary value problem with fractional-order boundary operator* // *Matematicheskie Trudy*, 2004, vol. 7, No. 1, p. 189–199. (In Russian). English transl.: *Siberian Advances in Mathematics*, 2005, vol. 15, No. 2, p. 115–125.
- 12 Turmetov B.Kh., Torebek B.T. *On the solubility of the analogue third boundary value problem with the boundary operator of fractional order* // *Journal SVMO*, 2010, vol. 12, No. 3, p. 135–144. (In Russian).
- 13 Torebek B.T. *An analogue of the third boundary value problem for the Laplace equation with the boundary operators of fractional order in the sense of Caputo* // *Dokl. AMAN. Nal'chik*, 2011, vol. 13, No. 2, p. 62–68. (In Russian).
- 14 Torebek B.T. *Smoothness of solutions of certain boundary value problems with fractional order boundary operators in classes Nikol'sky* // *Bull. KarSU. Ser. Mathematica*, 2010, No. 4 (60), p. 103–108. (In Russian).
- 15 Torebek B.T. *On solvability of nonlocal problems for the Laplace equation with the boundary operator of fractional order in the sense Caputo* // *Bull. KarSU. Ser. Mathematica*, 2012, No. 1 (65), p. 76–81. (In Russian).
- 16 Torebek B.T., Turmetov B.Kh. *On the solvability of some inverse problems for the Laplace equation with the boundary operator in the Riemann-Liouville* // *Bull. KarSU. Ser. Mathematica*, 2013, No. 1 (69), p. 113–121. (In Russian).
- 17 Berdyshev A.S., Turmetov B.Kh., Kadirkulov B.D. *Some properties and applications of the integro-differential operators of Hadamard-Marchaud type in the class of harmonic functions* // *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 2012, vol. 53, No. 4, p. 752–764. (In Russian).
- 18 Moiseyev E.I., Ambartsumyan V.E. *On the Solvability of a Nonlocal Boundary Value Problem with the Equality of Fluxes at a Part of the Boundary and of the Adjoint Problem* // *Differential Equations*, 2010, vol. 46, No. 5, p. 722–729.
- 19 Moiseyev E.I., Ambartsumyan V.E. *On the solvability of a nonlocal boundary value problem with opposite fluxes at a part of the boundary and of the adjoint problem* // *Differential Equations*, 2010, vol. 46, No. 6, p. 892–895.
- 20 Berdyshev A.S., Turmetov B.Kh. *On the solvability of some boundary value problems for the Laplace equation in a semicircle* // *Bull. KazNPU named after Abaiy, Almaty*, 2013, vol. 41, No. 1, p. 21–25. (In Russian).
- 21 Bitsadze A.V., Kalinichenko D.Ph. *Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoi fiziki*, Moscow: Nauka, 1977, p. 131 (In Russian).

УДК 539.3

Н.К.Аширбаев, Ж.Н.Аширбаева

*Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауезова, Шымкент (E-mail: ank\_56@mail.ru)*

## **Численное решение двумерной задачи о распространении волн в упругом теле с разрывными граничными условиями**

В статье в линейной постановке решена задача о распространении упругих нестационарных волн напряжений в двумерной плите с прямоугольным поперечным сечением конечных размеров. Волновой процесс вызван прикладыванием внешней П-образной динамической нагрузки на некоторой части лицевой границы прямоугольной плиты, а остальная часть этой границы свободна от напряжений. Сформулированная в терминах напряжений и скоростей смешанная задача моделируется численно с помощью явной разностной схемы сквозного счета, основанной на методе пространственных характеристик. Проанализированы динамические поля напряжений в прямоугольной плите.

*Ключевые слова:* изотропная среда, нагрузка, плоская деформация, особая точка, упругая, напряжение, скорость, волновой процесс, численное решение, алгоритм.

Процессы распространения упругих волн в неограниченной изотропной сплошной среде хорошо изучены. Основные уравнения движения показывают, что могут существовать только два типа волн: волна искажения и волна расширения. Распространение волн в ограниченном теле носит в общем случае сложный характер из-за взаимодействия волн с граничными поверхностями. При таком взаимодействии волны искажения частично обращаются в волны расширения и наоборот. Поэтому исследование волновых процессов в упругих телах с локальными неоднородностями (ослаблениями) в виде инородных включений, отверстий, вырезов и других представляет большой интерес,

вызванный потребностями развития механики деформируемого твердого тела и многочисленными приложениями в различных отраслях современной техники.

Несомненный интерес представляют задачи с разрывами в граничных условиях, так как информация о динамической напряженности в окрестности разрыва необходима для практических целей, например, проектирования строительных объектов. Однако до настоящего времени сравнительно мало решенных задач динамики с использованием моделей достаточно высокого уровня [1–4].

**Математическая постановка задачи.** Пусть плоская двумерная плита с прямоугольным поперечным сечением конечных размеров толщиной  $l$  в системе декартовых координат  $x_1 0 x_2$  занимает область  $0 \leq x_1 \leq l, |x_2| \leq L$  (рис. 1).

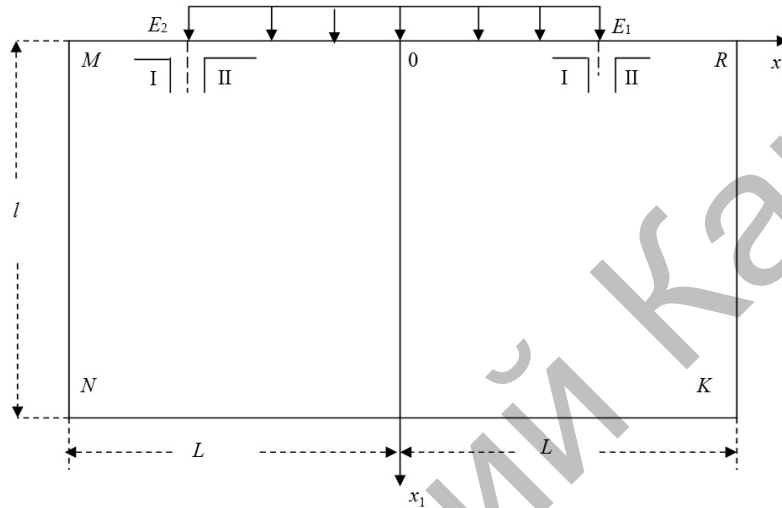


Рисунок 1. Исследуемая область

В начальный момент времени  $t = 0$  точки границы  $x_1 = 0, L^* \leq x_2 \leq L^{**}$  плоской двумерной плиты подвергаются динамическому воздействию, которое сводится к заданию на этой границе внешней П-образной нагрузки, остальная часть этой границы свободна от напряжений. Задача состоит в определении параметров волнового поля внутри прямоугольной плиты при условии, что напряженно-деформированное состояние в общепринятых обозначениях описывается системой уравнений линейной теории упругости

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\ \sigma_{11} &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{11}; \quad \sigma_{22} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{22}; \\ \sigma_{12} &= 2\mu \varepsilon_{12}; \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}. \end{aligned} \quad (1)$$

Вводя безразмерные координаты и функции:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{t \cdot c_1}{b}; \quad \bar{x}_i = \frac{x_i}{b}; \quad v_i = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (i=1,2); \\ p &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2\rho c_1^2}; \quad q = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\rho c_1^2}; \\ \tau &= \frac{\sigma_{12}}{\rho c_1^2}; \quad \gamma = \frac{c_1}{c_2}, \end{aligned}$$

систему (1) можно представить в эквивалентной форме в виде системы линейных уравнений первого порядка относительно искомых функций  $v_1, v_2, p, q, \tau$ :

$$v_{1,t} - p_{,1} - q_{,1} - \tau_{,2} = 0; \quad v_{2,t} - p_{,2} + q_{,2} - \tau_{,1} = 0;$$

$$\begin{aligned} \gamma^2(\gamma^2 - 1)^{-1} \cdot p_{,r} - v_{1,1} - v_{2,2} = 0; \quad \gamma^2 \cdot q_{,r} - v_{1,1} + v_{2,2} = 0; \\ \gamma^2 \cdot \tau_{,r} - v_{1,2} - v_{2,1} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем черта над безразмерными параметрами ради простоты опущена. Индексами 1 и 2 обозначены переменные  $x_1$  и  $x_2$  соответственно. Запятая обозначает частную производную по переменной, указанной после запятой.

Для определения волнового поля в прямоугольной плите, вызванного динамическим воздействием на поверхности  $x_1 = 0$ ,  $L^* \leq x_2 \leq L^{**}$ , необходимо проинтегрировать при  $t \geq 0$  гиперболическую систему (2) при нулевых начальных данных

$$v_1(x_1; x_2; 0) = v_2(x_1; x_2; 0) = p(x_1; x_2; 0) = q(x_1; x_2; 0) = \tau(x_1; x_2; 0) = 0 \quad (3)$$

и следующих граничных условиях:

$$p + q = f(t) = A \cdot \sin \omega t, \quad \tau = 0, \quad \text{при } x_1 = 0, \quad L^* \leq x_2 \leq L^{**}, \quad 0 \leq t \leq t^*; \quad (4)$$

$$p + q = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, \quad L^* \leq x_2 \leq L^{**}, \quad t \geq t^*;$$

$$p + q = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{при } x_1 = l, \quad |x_2| \leq L, \quad t \geq 0; \quad (5)$$

$$v_1(x_1; t) = v_2(x_1; t) = 0 \quad \text{при } 0 \leq x_1 \leq l, \quad x_2 = \pm L \quad t \geq 0; \quad (6)$$

где  $A$  — амплитуда внешней нагрузки;  $\omega$  — ее частота.

Для численного решения сформулированной смешанной задачи (2)–(6) использован модифицированный метод пространственных характеристик, сущность которого изложена в [5, 6]. Численный анализ волновых полей проводился для двумерной плиты  $0 \leq x_1 \leq 100 h_1$ ,  $|x_2| \leq 100 h_2$  из стали ( $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 7,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_1 = 5817$  м/сек,  $c_2 = 3109$  м/сек,  $\gamma = 1,87$ ) при следующих значениях исходных данных:  $h = 0,05$ ,  $k = 0,025$ ,  $A = 1$ ,  $T = 100k$ ,  $\omega = \pi / T = \pi / 100k$ . Необходимым и достаточным условием устойчивости разностной схемы является следующее ограничение на размеры шагов [5]:

$$\left( \frac{k}{h} \right)^2 \leq \min \left\{ \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1}, \frac{\gamma^2}{2(\gamma^2 - 1)} \right\},$$

$k$  — шаг по времени;  $h$  — шаг по координатам. Область приложения нагрузки принята следующая:

$$x_1 = 0, \quad -25h \leq x_2 \leq 25h.$$

Энергия деформации вычисляется по формуле

$$U = 0,5[v_1^2 + v_2^2 + \alpha_8 p^2 + \alpha_2(q^2 + \tau^2)].$$

На рисунках 2, 3 приведены изолинии энергии деформации  $U$  в поперечном сечении исследуемого тела в различные моменты времени. На рисунке 2 а представлены изолинии энергии деформации  $U$  в момент времени  $t = 100k$ . Это время характеризуется тем, что внешний синусоидальный импульс на границе  $x_1 = 0$  прямоугольной плиты перестал действовать. Можно заметить, что возмущенная область, занимая некоторую эллипсоидальную область, еще не достигла границ области исследования. В момент времени  $t = 190k$  передний фронт энергии деформации почти достиг свободную тыльную границу  $x_1 = 100h$  (рис. 2 б).

Угловые точки  $M, R$  лицевой границы  $x_1 = 0$  прямоугольной плиты уже включились в «работу». При  $t = 300k$  волна возмущения отразилась от свободной тыльной границы  $x_1 = 100h$ , но еще находится на полпути до лицевой границы  $x_1 = 0$ . Изолинии энергии деформации  $U$  для этого момента времени представлены на рисунке 3 а. Следует обратить внимание на то, что в области, прилегающей к участку нагружения, энергия деформации  $U$  практически равна нулю. В момент времени  $t = 500k$  вся исследуемая область находится в сложном напряженно-деформированном состоянии (рис. 3 б).

Анализ волновых эффектов во времена  $t \geq 500k$  оказывается затруднительным. С другой стороны, в этом и нет особой необходимости для наших целей, так как в эти промежутки времени в реальной конструкции уровни параметров напряженно-деформированного состояний малы и не могут быть полноценной диагностической характеристикой. Прежде всего, на всех приведенных рисунках результатах расчетов видна симметрия рассматриваемого параметра, что является подтверждением достоверности получаемых результатов, по крайней мере, в области исследованных промежутков времени.

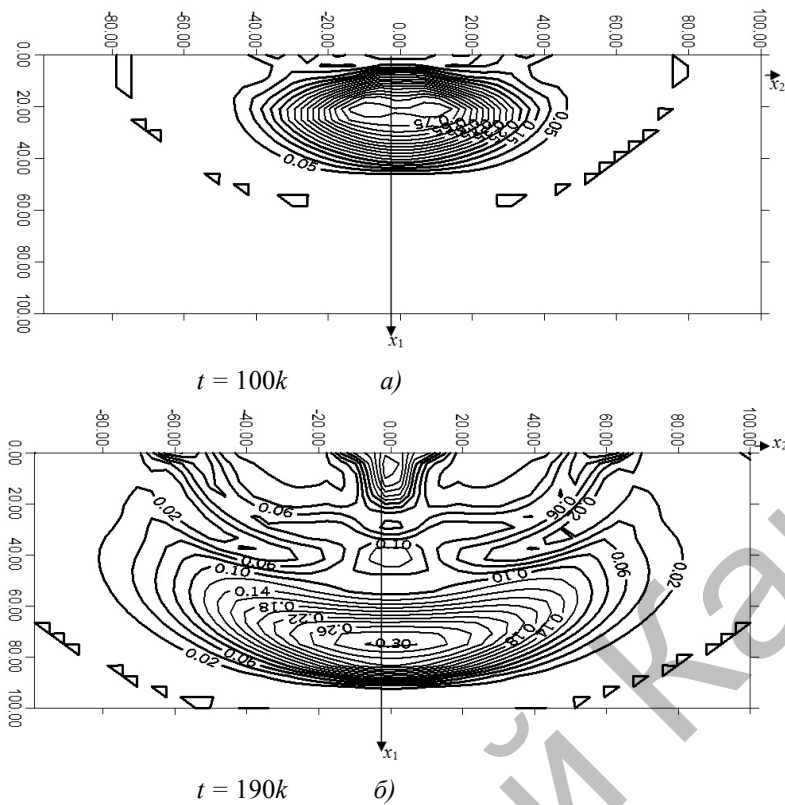


Рисунок 2. Изолинии энергии упругой деформации  $U$  в различные моменты времени

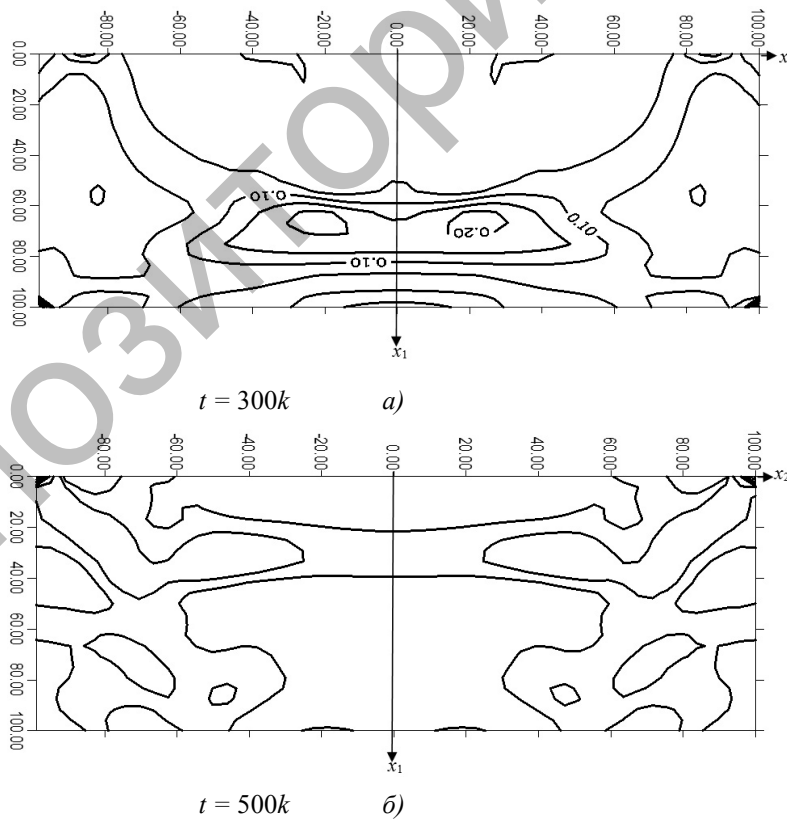


Рисунок 3. Изолинии энергии упругой деформации  $U$  в различные моменты времени

Таким образом, разработан оригинальный единый метод получения разрешающих уравнений в особых точках применительно к нестационарным задачам теории упругости, где нарушается «при-

вычная» для динамических задач гладкость функций. Разработанная методика была реализована на персональном компьютере для исследования напряженно-деформированного состояния и особенностей распространения динамических возмущений в телах конечных размеров с разрывами в граничных условиях. Результаты работы могут найти применение при расчетах на динамическую прочность современных инженерных конструкций, содержащих пластины прямоугольного очертания, при наличии в последних отверстий, вырезов, включений прямоугольной формы, в задачах общего машиностроения, геофизики, дефектоскопии, сейсморазведки полезных ископаемых, неразрушающего контроля конструкций и других областях техники.

#### Список литературы

- 1 *Ержанов Ж.С., Жубаев Н.Ж., Жунусов К., Кожабеков Ж.Т.* Поведение упругой среды при действии динамических нагрузок в цилиндрической полости // *Механика горных пород*. — Алма-Ата: Наука, 1975. — С. 48–58.
- 2 *Ержанов Ж.С., Каримбаев Т.Д., Байтелиев Т.Б.* Двумерные волны напряжений в однородных и структурно-неоднородных средах. — Алма-Ата: Наука, 1983. — С. 119.
- 3 *Ержанов Ж.С., Каримбаев Т.Д., Байтелиев Т.Б.* Волны напряжений в однородных и неоднородных средах. — Алма-ты: Ғылым, 1998. — С. 88.
- 4 *Петров И.Б., Холодов А.С.* Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // *Журн. вычислительной математики и математической физики*. — 1984. — Т. 24. — № 5. — С. 722–739.
- 5 *Клифтон Р.Дж.* Разностный метод в плоских задачах динамической упругости // *Механика*. — 1968. — № 1. — С. 103–122.
- 6 *Аширбаев Н.К.* Численное исследование влияния разрыва в граничных условиях на волновое поле в прямоугольнике // *Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика*. — 2012. — № 3 (67). — С. 7–11.

Н.К.Әшірбаев, Ж.Н.Әшірбаева

#### **Үзілісті шекаралық шарттармен берілген жазық серпімді денедегі толқындардың таралу есебінің сандық шешімі**

Мақалада көлденең қимасы тік төртбұрыш болатын жазық біртекті изотропты қатты денеде серпімді стационар емес толқындардың таралуы сызықты түрде қойылып, шешілген. Толқындық процесс бастапқы уақытта дененің бет жағының бір бөлігіне  $P$ -пішінді сыртқы динамикалық күш әсер етуден пайда болады, ал бет жағының қалған бөлігі кернеуден бос. Кернеулер мен жылдамдықтар терминінде қойылған аралас есеп айқын айырымдық схема, атап айтқанда, сандық кеңістіктік сипаттамалар әдісімен шешілген. Нәтижесінде қимасы тік төртбұрыш болатын денедегі динамикалық кернеулердің таралуы зерттелген.

N.K.Ashirbayev, Zh.N.Ashirbayeva

#### **Numerical solving two problems of wave propagation in an elastic body with discontinuous boundary conditions**

In this paper, a linear formulation is solved the problem of non-stationary propagation of elastic stress waves in an elastic isotropic medium with a rectangular cross-section of finite size. Wave by applying a process called external  $P$ -shaped dynamic load on some part of the face of the rectangular area and the rest of the boundary is stress-free. Formulated in terms of stress and velocity mixed problem is numerically simulated by using an explicit difference scheme through calculation based on the method of spatial characteristics. Analyzes the dynamic stress field in a rectangular strip.

#### References

- 1 *Erzhanov Zh.S., Zhubayev N.Zh., Zhunusov K., Kozhabekov Zh.T.* *The behavior of an elastic medium under dynamic loads in a cylindrical cavity* // *Rock mechanics*, Alma-Ata: Nauka, 1975, p. 48–58.
- 2 *Erzhanov Zh.S., Karimbayev T.D., Baiteliyev T.B.* *Two-dimensional waves of tension in homogeneous and structural and non-uniform environments*, Alma-Ata: Nauka, 1983, P. 119.
- 3 *Erzhanov Zh.S., Karimbayev T.D., Baiteliyev T.B.* *Stress wave in homogeneous and heterogeneous environments*, Almaty: Nauka, 1998, p. 88.