[2] Zhou S. P., Yao K., Su W. Y. *Fractional integrals of the Weierstrass functions: the exact box dimension.* Analysis in Theory and Applications. 2004. V. 20. P. 332–341.

[3] Yao K., Su W. Y., Zhou S. P. *The fractional derivatives of a fractal function.* Acta Mathematica Sinica. English Series. 2006. V. 22. P. 719–722.

[4] Ghosh U., Sarkar S., Das S. *Fractional Weierstrass function by application of Jumarie fractional trigonometric functions and its analysis.* arXiv:1508.06862. 2015.

ҮШІНШІ РЕТТІ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН БЕЙЛОКАЛ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛУІ

Орумбаева Нургул Тумарбековна[1], **Манат Алуа Манатқызы**[2]

[1,2]Академик Е.А. Бөкетов атындағы ҚарУ, Қарағанды қаласы, Қазақстан Республикасы
[1]E-mail: orumbayevanurgul@gmail.com
[2]E-mail: aluamanat5@gmail.com

Бұл жұмыста ф.-м.ғ. д., профессор Д.С. Джумабаев ұсынған [1] параметрлеу әдісі арқылы үшінші ретті сызықтық емес псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есептердің шешімділігі және жинақтылық шарттары алынды. Параметрлеу әдісі бойынша қарастырылып отырған интервал шағын бөліктерге бөлінеді. Әрбір бөлікте бастапқы мәндерге тәуелді шешімдер есептеледі, ал шеттік шарттар параметрлер арқылы сипатталады. Нәтижесінде бастапқы есеп пара-пар параметрлік есепке айналады, бұл шешімді табуды жеңілдетеді.

Зерттеу жұмысы [2-3] жұмыстардың негізінде жүргізілді. [2-3] жұмыстарда параметрлеу әдісінің көмегімен Бенджамин-Бона-Махони және Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс теңдеулері үшін бейлокал шеттік есептің жуық шешімін табу алгоритмі құрастырылды. Ұсынылған алгоритмінің орындалуы мен жинақтылығының жеткілікті шарттары алынды. Сонымен бірге, сызықтық емес теңдеуге арналған бейлокал шеттік есептің оқшауланған шешімі бар болатын облыс құрылды. Дәл және жуық шешімі арасындағы бағалаулар алынды.

$\Omega = [0, X] \times [0, T]$ облысында үшінші ретті сызықтық емес псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шеттік есеп қарастырылады:

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = f\left(x, t, u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right), (x,t) \in \Omega, \ \ u \in R, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \ \ t \in [0,T], \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \psi(t), \ \ t \in [0,T], \tag{3}$$

$$b_1(x)\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial x^2} + b_2(x)\frac{\partial^2 u(x,T)}{\partial x^2} + b_3(x)\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + b_4(x)\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} + \\ + b_5(x)u(x,0) + b_6(x)u(x,T) = \theta(x), \ \ x \in [0,X], \tag{4}$$

мұндағы $f : \Omega \times R \times R \times R \to R$ үзіліссіз, $\theta(x), b_j(x), j = \overline{1,6}$ функциялары $[0, X]$ аралығында үзіліссіз, $\varphi(t), \psi(t)$ функциялары $[0, T]$ аралығында үзіліссіз.

Үшінші ретті сызықтық емес псевдопараболалық теңдеу үшін бейлокал шарттары бар шеттік есепті шешудің алғашқы қадамдары сызықтық теңдеуді шешумен ұқсас жүргізіледі. Сондықтан бастапқы кезеңдерге қысқаша тоқталайық. Жаңа айнымалы және функционалдық қатынастар енгізу арқылы (1)-(4) бейлокал шарттары бар шеттік есеп сызықтық емес (5)-(6) интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін бейлокал шеттік есепке келтіріледі. Одан кейін параметрлеу әдісін қолдану үшін h>0: Nh=T қадамы бойынша $[0,T)=\bigcup_{r=1}^{N}[(r-1)\,h,rh)\,,N=1,2,\ldots$. бөліктеуі жүргізіледі. Сонда (5)-(6) шеттік есебі (7)-(9) пара-пар шеттік есепке көшеді. (7)-(9) есебінде $\lambda_r\,(x)=w_r\,(x,(r-1)\,h)$ белгілеуі және $\widetilde{w_r}\,(x,t)=w_r\,(x,t)-\lambda_r\,(x)\,,r=\overline{1,N}$ алмастыруын енгізу арқылы $\lambda_r\,(x)$ белгісіз функциясына тәуелді (7)-(9) есебіне пара-пар (10)-(13) шеттік есебі алынады.

(10), (11) есебі $\lambda_r\,(x)$-тің бекітілген мәндерінде интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін бірпараметрлі Коши есебі болып табылады және келесі сызықтық емес интегралдық теңдеуге пара-пар

$$\widetilde{w_r}\,(x,t)=\int_{(r-1)h}^{t}f(x,t,\varphi(t)+\psi(t)x+\int_0^x\int_0^\xi w\,(\xi_1,t)\,d\xi_1 d\xi,\,\varphi\prime(t)+\psi\prime(t)x+$$

$$+\int_0^x\int_0^\xi\frac{\partial w\,(\xi_1,t)}{\partial t}d\xi_1 d\xi\;w(x,t))d\tau. \tag{14}$$

(14)-теңдеуде $t\to rh-0$ ұмтылғанда шекке көшіп, (12), (13)-те $\lim_{t\to rh-0}\widetilde{wr}(x,t)$, $\lim t\to rh-0\frac{\partial\widetilde{w_N}(x,t)}{\partial t},r=\overline{1,N}$ орнына оған сәйкес белгісіз функциялар $\lambda_r\,(x)\,,r=\overline{1,N}$ үшін оң жақ бөліктерін қойып және (12) теңдеудің екі жағын да h>0 көбейту арқылы келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\lim_{t\to rh-0}\widetilde{wr}(x,t),\lim t\to rh-0\frac{\partial\widetilde{w_N}(x,t)}{\partial t},r=\overline{1,N} \tag{15}$$

$\{\lambda_r\,(x)\,,\widetilde{w_r}\,(x,t)\},r=\overline{1,N}$ функциялар жүйесін табу үшін, f функциясы және h>0 бөліктеу қадамы арқылы анықталатын (15), (14) теңдеулерінен тұратын тұйықталған теңдеулер жүйені аламыз.

$h>0:Nh=T\,(N=1,2,\ldots)$ қадамын және

$$\lambda^{(0)}\,(x)=(\lambda_1^{(0)}\,(x)\,,\lambda_2^{(0)}\,(x)\,,\ldots,\lambda_N^{(0)}\,(x)'\in C\left([0,\omega]\,,R^N\right)$$

вектор-функциясын таңдап, $\lambda_r\,(x)=\lambda_r^{(0)}\,(x)\,,r=\overline{1,N}$ болған жағдайда, (10)-(13) есебінің шешімі $\widetilde{w}_r^{(0)}\,(x,t)\in\widetilde{C}\,(\Omega_r,R)\,,r=\overline{1,N}$ бар болады. $\lambda^{(0)}\,(x)\in C\left([0,X]\,,R^N\right)$ жиынын $G_0\,(f,x,h)$ деп белгілейміз, ал $\lambda^{(0)}\,(x)$-ке сәйкес (10)-(13) есебінің шешімдер жиынын

$$\widetilde{w}_r^{(0)}\,(x,[t])=\left(\widetilde{w}_1^{(0)}\,(x,t)\,,\widetilde{w}_2^{(0)}\,(x,t)\,,\ldots,\widetilde{w}_N^{(0)}\,(x,t)\right)'$$

арқылы белгілейміз.

$\lambda^{(0)}\,(x)\in G_0\,(f,x,h)$ функциясын, $\widetilde{w}^{(0)}\,(x,[t])$ шешімін және $\phi_1>0,\phi_2>0$ сандарын алып, келесі жиындар құрылады:

$$S\left(\lambda^{(0)}\,(x)\,,\phi_1\right)=(\lambda_1\,(x)\,,\lambda_2\,(x)\,,\ldots,\lambda_N(x))\prime\in C([0,X]\,,R^N):$$

$$\left\|A_r(x)-A_r^{(0)}(x)\right\|<\varphi_{1,r}, \quad r=1,N$$

$$S\left(\widetilde{w^{(0)}}\left(x,[t]\right),\phi_1\phi_2\right)=\left(\widetilde{w_1}\left(x,t\right),\widetilde{w_2}\left(x,t\right),\ldots,\widetilde{w_N}\left(x,t\right)\right)',\widetilde{w_r}\left(x,t\right)\in C\left(\Omega_r,R^N\right):$$

$$\left\|\tilde{w}_n(x,t)-\tilde{w}_n^{(0)}(x,t)\right\|<\varphi_1\varphi_2, \quad (x,t)\in\Omega_n, \quad r=1,N$$

$$G^0\left(\phi_1\left(x\right),\phi_2\right)=\{(x,t,w):(x,t)\in\Omega,$$

$$\left\|w-A_r^{(0)}(x)-w_r^{(0)}(x,t)\right\|<\varphi_1(1+\varphi_2), \quad (x,t)\in\Omega_r, \quad r=1,N$$

$$\left\|w-A_0^{(0)}(x)-\lim_{t\to T}w_r^{(0)}(x,t)\right\|<\varphi_1(1+\varphi_2), \quad t=T$$

$U\left(f,L_1,L_2,L_3,x,h\right)$ арқылы

$$\left(\lambda^{(0)}\left(x\right),\widetilde{w}_r^{(0)}\left(x,[t]\right),u^{(0)}\left(x,[t]\right),\frac{\partial u^{(0)}\left(x,[t]\right)}{\partial t},\phi_1,\phi_2\right)$$

функциялар жиынтығын белгілейміз. Бұл жиынтықта $f\left(x,t,u,u_t,w\right)$ функциясы $G^0\left(\phi_1,\phi_2\right)$ жиынында $f'_w\left(x,t,u,u_t,w\right),f'_u\left(x,t,u,u_t,w\right),f'_{u_t}\left(x,t,u,u_t,w\right)$ дербес туындылары бар және

$$\left\|F_1^i(x,t,u,u_t,w)\right\|\le L_1,\left\|F_{ut}^i(x,t,u,u_t,w)\right\|\le L_2,\left\|F_u^i(x,t,u,u_t,w)\right\|\le L_3.$$

мұндағы $L_1,L_2,L_3-const.$

$\{\lambda_r\left(x\right),\widetilde{w_r}\left(x,t\right)\},r=\overline{1,N}$ жүйесі бойынша $\{\lambda\left(x\right),\widetilde{w}\left(x,[t]\right)\}$ жұбын құрамыз, мұндағы,

$$\lambda\left(x\right)=\left(\lambda_1\left(x\right),\lambda_2\left(x\right),\ldots,\lambda_N\left(x\right)\right)',$$

$$\widetilde{w}\left(x,[t]\right)=\left(\widetilde{w_1}\left(x,t\right),\widetilde{w_2}\left(x,t\right),\ldots,\widetilde{w_N}\left(x,t\right)\right)'.$$

(10)-(13) есебінің бастапқы жуықтауы ретінде $\widetilde{w}^{(0)}\left(x,[t]\right)$ функциясын алып, төмендегі алгоритм бойынша тізбекті жуықтауларды құрастырамыз:

1-қадам. $\widetilde{w}_r\left(x,t\right)=\widetilde{w}_r^{(0)}\left(x,t\right)$ деп алып, (10) және (15) теңдеулерінен $\frac{\partial\widetilde{w}_r^{(1)}(x,t)}{\partial t},\lambda_r^{(1)}\left(x\right),r=\overline{1,N}$ функцияларын табамыз. (14) интегралдық теңдеуден $\widetilde{w}_r^{(1)}\left(x,t\right)$ функциясы анықталады.

2-қадам. $\widetilde{w}_r\left(x,t\right)=\widetilde{w}_r^{(1)}\left(x,t\right)$ деп алып, (10) және (15) теңдеулерінен $\frac{\partial\widetilde{w}_r^{(2)}(x,t)}{\partial t},\lambda_r^{(2)}\left(x\right),r=\overline{1,N}$ функцияларын табамыз. (14) интегралдық теңдеуден $\widetilde{w}_r^{(1)}\left(x,t\right)$ функциясы анықталады.

Үдерісті жалғастыра отырып, k-шы қадамда $\left\{\frac{\partial\widetilde{w}_r^{(k)}(x,t)}{\partial t},\ \lambda_r^{(k)}\left(x\right),\widetilde{w}_r^{(k)}\left(x,t\right)\right\}$ функциялар үштігінен тұратын жүйе алынады.

Ұсынылған алгоритмнің жүзеге асырылуы, жинақтылығы және функционалдық параметрлері (10)–(13) теңдеулер жүйесіне сәйкес көпсипатты шеттік есептің шешімінің бар болуына жеткілікті шарттар келесі теоремада келтірілген.

1-теорема. Барлық $\left(x,\lambda\left(x\right),\widetilde{w}\left(x,[\cdot]\right)\right)$ үштігі үшін, мұндағы $x\in[0,X]$, $\frac{\partial Q_h(x,\lambda(x),\widetilde{w}(x,[\cdot]))}{\partial\lambda}$ Якоби матрицасы қайтымды болатындай $h>0:Nh=T,(N=1,2,\ldots)$ қадамы, $\phi_1>0,\phi_2>0,\left(\lambda^{(0)}\left(x\right),\widetilde{w}_r^{(0)}\left(x,[t]\right),\phi_1,\phi_2\right)\in U\left(f,L_1,L_2,L_3,x,h\right)$ сандары бар болсын және келесі теңсіздіктер орындалсын:

1. $\left\|\frac{\partial\Phi_h(\alpha\lambda(x),\delta)(x,t,[\cdot])}{\partial\lambda}\right\|^{-1}\le\tilde{p}(h)$

2. $\widetilde{q}\left(h\right) = h\mu\left(1 + L_2\int_0^\omega\int_0^x e^{L_2\frac{\xi^2}{2}}d\xi dx\right) < 1$ мұндағы
   $L_2\int_0^\omega\int_0^x e^{L_2\frac{\xi^2}{2}}d\xi dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_2^n\omega^{2n}}{2^{n-1}(n-1)!(2n-1)(2n)},$
3. $[a_p(\alpha,h)]^T\max_{x\in[0,X]}\|p(x)\|\max_{x\in[0,X]}\|p_0(x)\|\max_{x\in[0,X]}\left\|Q_h\left(x,A^{(0)}(x),\tilde{w}^{(0)}(x,[\cdot])\right)\right\| +$
   $+\tilde{p}(h)\max_{x\in[0,X]}\left\|Q_h\left(x,A^{(0)}(x),\tilde{w}^{(0)}(x,[\cdot])\right)\right\| < \phi_1$
4. $\frac{h}{1-\delta(h)}\max_{x\in[0,X]}\|p_0(x)\| < \phi_2$

мұндағы $\mu = e^{-\frac{\omega^2}{2}}\left(L_2 + \frac{\omega^2}{2} + L_4\right)\left(1 + h^2p(h)\max_{x\in[0,X]}\|p(x)\|\right)$

$$p_0\left(x\right) = \left(L_3\frac{x^2}{2} + L_2\int_0^x\int_0^\xi e^{L_2\frac{{\xi_1}^2}{2}}\left(L_3\frac{{\xi_1}^2}{2} + L_1\right)d\xi_1 d\xi + L_1\right),$$

$$p\left(x\right) = \left(p_1\left(x\right) + \widetilde{p_2}\left(x\right) + p_3\left(x\right)\frac{x^2}{2!}\right)e^{h\widetilde{\gamma}(h)\widetilde{p_2}(x)},$$

$$p_1\left(x\right) = L_1\max\left\{hb2x, 1,\right.$$

$$p_2(x) = L_4\max\{h\|b_2(x)\|, 1\} + h\|b_2(x)\| + h\|b_4(x)\|,$$

$$p_3(x) = L_4\max\{h\|b_2(x)\|, 1\} + h\|b_2(x)\| + h\|b_6(x)\|.$$

$$\widetilde{p_2}\left(x\right) = p_2\left(x\right)\int_0^x\int_0^\xi e^{\frac{L_2\xi_1^2}{2}}\left(L_3\frac{\xi_1^2}{2!} + L_1\right)d\xi_1 d\xi.$$

Онда осы алгоритм арқылы анықталған $\{\lambda^{(k)}\left(x\right), \widetilde{w}_r^{(k)}\left(x,[t]\right)\}, k = 1,2,\ldots,$ тізбек $S\left(\lambda^{(0)}\left(x\right),\phi_1\right)\times S\left(\widetilde{w}_r^{(0)}\left(x,[t]\right),\phi_1\phi_2\right)$ жиынында (10)-(13) есебінің шешімі $\left(\lambda^*\left(x\right),\widetilde{w^*}\left(x,[t]\right)\right)$ функцияларына жинақталады және келесі бағалаулар орындалады:

1. $\left\|\lambda^r - \lambda^{(k+1)}\right\|_2 \leq\leq [h\tilde{\gamma}(h)]^k\max_{x\in[0,X]}\|p_0(x)\|\max_{x\in[0,X]}\|$
   $p(x)\|\frac{[\tilde{q}(h)]^k}{1-\tilde{q}(h)}\max_{x\in[0,X]}\left\|Q_h\left(x,A^{(0)}(x),\tilde{w}^{(0)}(x,[\cdot])\right)\right\|$
2. $\left\|\tilde{w}_r^* - \tilde{w}_r^{(k+1)}\right\|_2 \leq\leq \frac{[\tilde{q}(h)]^{k+1}}{1-\tilde{q}(h)}h\tilde{\gamma}(h)\max_{x\in[0,X]}$
   $\|p_0(x)\|\max_{x\in[0,X]}\left\|Q_h\left(x,A^{(0)}(x),\tilde{w}^{(0)}(x,[\cdot])\right)\right\|$

Сонымен бірге, (10)-(13) есебінің кез келген $\left(\lambda\left(x\right),\widetilde{w}\left(x,[t]\right)\right)$ шешімі $S\left(\lambda^{(0)}\left(x\right),\phi_1\right)\times S\left(\widetilde{w}_r^{(0)}\left(x,[t]\right),\phi_1\phi_2\right)$ жиынында оқшауланған.

(1)-(4) және (10)-(13) есептерінің пара-парлығынан және 1-теоремадан **2-теорема.** Егер 1-теореманың шарттары орындалса, онда $\{u^{(k)}\left(x,t\right)\}, k = 1,2,\ldots$, функциялар тізбегі $S\left(u^{(0)}\left(x,t\right),\Phi\left(x\right)\right)$ жиынында орналасқан және (1)-(4) есебінің $u^*\left(x,t\right)$ шешіміне $S\left(u^{(0)}\left(x,t\right),\Phi\left(x\right)\right)$ ішінде жинақталады және келесі бағалаулар орындалады:

$$\left\|w^*(x,t) - u^{(k)}(x,t)\right\| \leq \left(h\tilde{\gamma}(h)\right)\max_{x\in[0,X]}\|p_0(x)\| +$$

$$+\tilde{q}(h)\max_{x\in[0,X]}\|p_0(x)\|\frac{[\tilde{q}(h)]^{k+1}}{1-\tilde{q}(h)}\max_{x\in[0,X]}\left\|Q_h\left(x,A^{(0)}(x),\tilde{w}^{(0)}(x,[\cdot])\right)\right\|, \quad (x,t)\in\Omega$$

Сонымен бірге, (1)-(4) есебінің кез келген шешімі $S\left(u^{(0)}\left(x,t\right),\Phi\left(x\right)\right)$ жиынында оқшауланған.

Әдебиеттер тізімі

[1] Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29, №1. – С. 50-66.

[2] Manat A.M., Orumbayeva N.T. On one approximate solution of a nonlocal boundary value problem for the Benjamin-Bon-Mahoney equation // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2023. №110(2) – P. 84-92. https://doi.org/10.31489/2023m2/84-92

[3] Manat A.M., Orumbayeva N.T. On one solution of a nonlocal boundary value problem for a nonlinear partial differential equation of the third order // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2024. №121(1) – P. 65-75. https://doi.org/10.26577/JMMCS202412117

ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА КОНЕЧНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мухтарбай Отелбаев[1], **Бакытбек Кошанов**[2]

[1,2]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

[1]E-mail:otelbaevm@mail.ru

[2]E-mail:koshanov@math.kz

Аннотация.

В этой статье мы получаем две теоремы об априорных оценках решений нелинейных уравнений в конечномерном пространстве. Эти теоремы доказаны при выполнении некоторых условий, которые заимствованы из условий которым удовлетворяют конечномерные аппроксимации одного класса нелинейных начально-краевых задач.

1. Введение и о происхождении задачи

Многие задачи математической физики благодаря закону сохранения энергии позволяют доказать существование решения, которое удовлетворяет энергетической оценке. Энергетическая оценка в случае, когда количество пространственных переменных n не меньше чем 3, обычно не позволяет использовать теорию возмущений.

Решения, которые не позволяют (точнее, не могут позволить) использовать теорию возмущений, называются (обычно) "слабыми" решениями.

Возможность использовать теорию возмущений очень важна в задачах математической физики. Поэтому в теории дифференциальных уравнений сильно интересуются вопросами существования решения, позволяющего использовать теорию возмущений.

Решение уравнения, которое позволяет использовать теорию возмущений, математически называют "сильным" решением (не всегда).

Многие задачи математической физики могут быть записаны в "ограниченной записи" (в виде интегрального уравнения) обычно следующего вида

$$f(u) = u + L(u) = g, \tag{1}$$

где $L(u)$ – нелинейная часть. Это уравнение изучается часто в метрике некоторого Банахова или Гильбертова пространства H.