

Список литературы

1. Нахушев А.М. // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19. — № 1. — С. 86–94.
2. Ахмедов Ф.Ш. // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 283. — № 4. — С. 787–791.
3. Джениалиев М.Т. Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25. — № 4. — С. 641–651.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М., 1967.
5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
6. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М., 1971.
7. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. — М., 1980.
8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М., 1967.
9. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л., 1950.
10. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М., 1972.
11. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I. Теория распределений и анализ Фурье. — М., 1986.
12. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.

УДК 517.51

Г.С.Кенжебекова

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ С ВЕСОМ СУММЫ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ СИСТЕМЕ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ИЗ КЛАССА R_0^+BVS

Мақалада коэффициенттері R_0^+BVS кластарына қатысты мультипликативтік жүйе бойынша қатарлардың қосындысы салмақты интегралдануы үшін қажетті және жеткілікті шарттар табылды.

In this work the necessary and sufficient condition for integrability weighted sums of series with respect to multiplicative system with coefficients in R_0^+BVS are founded.

В данной работе находится необходимое и достаточное условие для интегрируемости с весом суммы рядов по мультипликативной системе Прайса.

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, $p_n \geq 2$, $n = 1, 2, \dots$. Положим $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \quad 0 \leq x_n < p_n, \quad x_n \text{ — целые.}$$

Такое разложение будет единственным, если для $x = \frac{k}{m_n}$ брать разложение с конечным числом ненулевых x_n . Если $k \in \mathbb{Z}_+$ записано в виде

$$k = \sum_{s=1}^{v(k)} k_s m_{s-1}, \quad 0 \leq k_s < p_s, \quad k_s \text{ — целые,}$$

то по определению для $x \in [0, 1)$ полагаем

$$\chi_k(x) = \exp 2\pi i \sum_{j=1}^{v(k)} \frac{x_j k_j}{p_j}.$$

Таким образом, построенная система $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ называется мультипликативной на $[0, 1)$ системой Прайса [1].

Известно, что указанная система является полной ортонормированной системой в $L[0, 1)$ [1; 32].

Рассмотрим ряд по мультипликативной системе Прайса:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \chi_n(x),$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию $R_0^+ BVS$.

Будем говорить, что последовательность положительных чисел $c := \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию $R_0^+ BVS$, если

$$1) \text{ для всех } m \in \mathbb{N} \text{ верно } \sum_{n=m}^{\infty} |c_n - c_{n+1}| \leq K(c)c_m;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

Понятие последовательности «с остатком ограниченной вариации» или $R_0^+ BVS$ ввел в своей работе Лейндлер [2].

Очевидно, что класс монотонных последовательностей $M = \{c : c_n \downarrow 0\}$ содержится в $R_0^+ BVS$.

Определим функцию $\gamma(x)$ с помощью последовательности γ таким образом: $\gamma\left(\frac{1}{n}\right) := \gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$ и существуют положительные числа A и B такие, что

$$A\gamma_n \leq \gamma(x) \leq B\gamma_{n+1} \text{ для } x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right).$$

Последовательность положительных чисел $\gamma := \{\gamma_n\}$ называется (почти возрастающей) почти убывающей, если неравенство

$$c\gamma_n \geq \gamma_m \quad (\gamma_n \leq c\gamma_m)$$

выполняется для всех натуральных чисел $n \geq m$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $2 \leq p_n \leq M$, $\lambda_n \in R_0^+ BVS$ и $1 \leq p < \infty$.

1. Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию $\exists \varepsilon_1 > 0 : \{\gamma_n n^{-1+\varepsilon_1}\}$, почти убывает, то неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n n^{p-2} \lambda_n^p < \infty \quad (1)$$

является достаточным для выполнения

$$\gamma(x) |f(x)|^p \in L[0,1]. \quad (2)$$

2. Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию $\exists \varepsilon_2 > 0 : \{\gamma_n n^{p-1-\varepsilon_2}\}$, почти убывает, тогда условие (1) является необходимым для выполнения условия (2).

Для доказательства теоремы потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть последовательность $\lambda_n \in R_0^+ BVS$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \chi_k(x),$$

тогда имеет место неравенство

$$f(x) \leq C \cdot \sum_{k=0}^n \lambda_k$$

при $x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$.

Доказательство Леммы 1.

Пусть $x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$. Используя условие, что $|\chi_k(x)| = 1$ [1], имеем:

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=0}^{m_n} \lambda_k \chi_k(x) + \sum_{k=m_n+1}^{\infty} \lambda_k \chi_k(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{m_n} \lambda_k + \left| \sum_{k=m_n+1}^{\infty} \lambda_k \chi_k(x) \right|. \quad (3)$$

На основании преобразования Абеля и неравенства

$$|D_k(x)| \leq \frac{C}{x}, \quad \forall x \in (0,1),$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ [1; 37], имеем:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m_n+1}^{\infty} \lambda_k \chi_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=m_n+1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdot D_{k+1}(x) - \lambda_n D_n(x) \right| \leq \\ &\leq \frac{C}{x} \left(\sum_{k=m_n+1}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| + \lambda_{n+1} \right) \leq \frac{C}{x} (2\lambda_{n+1} \leq C \cdot (n+1)\lambda_{n+1}). \end{aligned} \quad (4)$$

Но, учитывая, что $\lambda_n \in R_0^+ BVS$ имеем, что при $n > k$

$$\lambda_n = \left| \sum_{j=n}^{\infty} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) \right| \leq \sum_{j=n}^{\infty} |\lambda_j - \lambda_{j+1}| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |\lambda_j - \lambda_{j+1}| \leq C\lambda_k,$$

т.е. последовательность $\{\lambda_k\}$ почти убывает.

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{m_n} \lambda_k \geq C\lambda_n(n+1) \geq C\lambda_{n+1}(n+1). \quad (5)$$

Из (3)–(5) следует, что

$$|f(x)| \leq C \cdot \sum_{k=0}^{m_n} \lambda_k$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1.

1. На основании леммы 1 имеем

$$\int_0^1 \gamma(x) |f(x)|^p dx = \sum_{m_n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{m_n+1}}^{\frac{1}{m_n}} \gamma(x) |f(x)|^p dx = C \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m_n} \lambda_k \right)^p \int_{\frac{1}{m_n+1}}^{\frac{1}{m_n}} \gamma(x) dx \leq C \sum_{m_n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2} \left(\sum_{k=0}^{m_n} \lambda_k \right)^p. \quad (6)$$

Далее, применяя следующее известное неравенство [3]:

$$\sum_{m_n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{v=m_n}^{\infty} a_v \right)^p \leq C_p \sum_{m_n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} a_n^p \left(\sum_{v=m_n}^{\infty} \lambda_v \right)^p, \quad p \geq 1 \quad (7)$$

для $\{a_n \geq 0\}$ и $\{\lambda_n > 0\}$ имеем:

$$\sum_{m_n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2} \left(\sum_{k=0}^{m_n} \lambda_k \right)^p \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p \left(\frac{\gamma_n}{n^2} \right)^{1-p} \left(\sum_{v=k}^{\infty} \frac{\gamma_v}{v^2} \right)^p. \quad (8)$$

Используя условие из теоремы 1 на последовательность $\{\gamma_v\}$, получаем, что

$$\sum_{v=k}^{\infty} \frac{\gamma_v}{v^2} \leq C \gamma_k k^{-1+\varepsilon_1} \sum_{v=k}^{\infty} \frac{1}{v^{1+\varepsilon_1}} = C \frac{\gamma_k}{k}.$$

Отсюда и из (8) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2} \left(\sum_{k=0}^n \lambda_k \right)^p \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \lambda_k^p. \quad (9)$$

Следовательно, на основании оценок (6)–(9) имеем

$$\int_0^1 \gamma(x) |f(x)|^p dx \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \lambda_k^p < \infty.$$

2. Сначала покажем, что при выполнении условия теоремы $f(x) \in L(0,1)$.

Действительно, если $p \in (1, \infty)$, то на основании неравенства Гельдера

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^p \gamma(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (\gamma(x))^{-\frac{p'}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad \text{где } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Далее, используя условие на $\gamma(x)$, оценим:

$$\int_0^1 \gamma(x)^{\frac{-p'}{p}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{\gamma(x)} \right)^{\frac{1}{p-1}} dx \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_n} \right)^{\frac{1}{p-1}} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} dx \leq C \left(\frac{1}{\gamma_1} \right)^{\frac{1}{p-1}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\frac{\varepsilon_2}{p-1}} \leq C_1.$$

Пусть $p = 1$. Тогда из условия теоремы следует, что последовательность $\{\gamma_n\}$ почти возрастает.

Так как $\gamma_n n^{-\varepsilon_2} \geq \gamma_1$, то $\gamma_n \geq \gamma_1 n^{\varepsilon_2} \geq \gamma_1$.

Поэтому

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{|f(x)| \cdot \gamma(x)}{\gamma(x)} dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A\gamma_n} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(x)| \gamma(x) dx \leq \frac{C}{\gamma_1} \int_0^1 |f(x)| \cdot \gamma(x) dx < C_2.$$

Итак, $f(x) \in L(0,1)$.

Обозначим через

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

тогда (см. [1])

$$F\left(\frac{1}{2^n}\right) = 2^{-n} \int_0^{\frac{1}{2^n}} f(x) \cdot D_{2^n}(x) dx = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \lambda_k.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \left(\frac{1}{2^k} \sum_{k=1}^{2^k-1} \lambda_k \right)^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \left(F\left(\frac{1}{2^k}\right) \right)^p = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \left(\int_0^{\frac{1}{2^k}} |f(t)| dt \right)^p = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \left(\sum_{\nu=k}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^{\nu+1}}}^{\frac{1}{2^\nu}} |f(t)| dt \right)^p.$$

Введем обозначение

$$f_\nu = \int_{\frac{1}{2^{\nu+1}}}^{\frac{1}{2^\nu}} |f(t)| dt, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Тогда на основании (7) имеем

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \left(\frac{1}{2^k} \sum_{k=1}^{2^k-1} \lambda_k \right)^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \left(\sum_{\nu=k}^{\infty} f_\nu \right)^p = C \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu (\gamma_\nu \cdot \nu^{p-2})^{1-p} \left\{ \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_k k^{p-2} \right\}^p,$$

$$J \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu^p \cdot \gamma_\nu \cdot \nu^{2(p-1)}.$$

Если $p \in (1, \infty)$, то по неравенству Гельдера $\left(p' = \frac{p}{p-1} \right)$

$$f_\nu^p = \left(\int_{\frac{1}{2^{\nu+1}}}^{\frac{1}{2^\nu}} |f(x)| dx \right)^p \leq C \int_{\frac{1}{2^{\nu+1}}}^{\frac{1}{2^\nu}} |f(x)|^p dx \cdot \left(\frac{1}{2^\nu} \right)^{\frac{p}{p-1}} = C \cdot 2^{\nu(1-p)} \int_{\frac{1}{2^{\nu+1}}}^{\frac{1}{2^\nu}} |f(x)|^p dx.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{p-2} \left(\frac{1}{2^k} \sum_{k=1}^{2^k-1} \lambda_k \right)^p \leq C \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu^p \gamma_\nu \nu^{2(p-1)} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu \nu^{2(p-1)} 2^{\nu(1-p)} \int_{\frac{1}{2^{\nu+1}}}^{\frac{1}{2^\nu}} |f(x)|^p dx \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu 2^{\frac{1}{p-1} \nu} \int_{\frac{1}{2^{\nu+1}}}^{\frac{1}{2^\nu}} |f(x)|^p dx \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^{\nu+1}}}^{\frac{1}{2^\nu}} |f(x)|^p \gamma(x) dx = \int_0^1 |f(x)|^p \gamma(x) dx.$$

Теорема 1 доказана.

Для тригонометрического случая подобная теорема ранее была доказана С.Ю.Тихоновым [4].

Список литературы

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. — М.: Наука, 1987. — 344 с.
2. Leindler. On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Analysis Mathematica. — 2001. — Vol. 27. — P. 279–285.
3. Potapov M. K. and Berisha M. // Publ. Inst. Math. — Beograd (N.S.), 1979. — № 26(40). — P. 215–228.
4. Tikhonov S. Yu. On the integrability of trigonometric series // Mathematical Notes. — 2005. — Vol. 78. — № 3. — P. 437–442.

УДК 519 644

Д.Н.Кулбаева

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ К КВАДРАТУРНЫМ ФОРМУЛАМ КОРОБОВА

Функционалдарды тензорлы көбейту әдісі сандық интегралдауға қатысты дамыту есебінде қарастырылған. Берілген модельді жағдайдың мақсаты Коробов кластарында сандық интегралдаудың қателігін теориялық тұрғыдан бағалау және есептеуіш тәжірибелер жүргізіп, белгілі жұмыстармен салыстыру болып табылады.

The problem of the given work consists in the further development of a method tensor products of functionals применительно to a problem of numerical integration. The research plan in the given situation consists in the following: at first the general theoretical outcome with an estimation of an error of numerical integration for classes Коробова will be received. Then computing experiments for comparison of the received four-dimensional quadrature formulas with earlier known works will be made.

К основным математическим моделям относится понятие интеграла — одна из центральных и постоянно повторяющихся тем в истории математики за последние два тысячелетия (см. [1; 199]).

Исследования реальных явлений математическими методами проводятся по схеме: от наблюдений и экспериментов к построению математической модели с последующим её изучением математическими средствами; завершаются выводами в рамках модели и их сравнением с реальными фактами.

Мощным стимулом к применению математических методов к практическим задачам, своего рода математической экспансией, послужило появление в середине XX в. электронных вычислительных машин (компьютеров), позволяющих в режиме реального (полиномиального) времени получать приемлемые решения в виде чисел.

Тем самым задача приближенного вычисления интегралов относится к актуальным задачам математики и информатики, в последнее время именуемым как «Научные вычисления (Computing Science)».

К известным методам теории приближений относится «Метод Смоляка», который позволяет переносить результаты о приближениях функционалов меньших размерностей на большие [2, 3].

«Метод Смоляка» описан им самим как метод «тензорных произведений классов». Н.Темиргалиевым [4, 5] был исследован механизм действия «Метода Смоляка» и предложен «метод тензорного произведения функционалов», эффективность которых показана в публикациях [6, 7].

Конкретная реализация «Метода Смоляка», когда в качестве исходных была принята одномерная

квадратурная формула $\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} f\left(\frac{k}{2^n}\right)$ с равными весами и равномерной сеткой, была предметом

изучения математиков из разных стран. Среди них можно отметить группу ученых, работающих по