

# КОНДЕНСАЦИЯЛАНҒАН КҮЙДІҢ ФИЗИКАСЫ ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

ӘОЖ 539.211

## Қатты дене беттерін реттеудегі мультифракталдық талдаудың маңыздылығы

### The importance of using multifractal analysis in classification of solid surfaces

Бақтыбеков Қ.С., Кутумова Ж.Б.

*Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана (E-mail: kutumova\_zhb@enu.kz)*

Статья посвящена классификации поверхностей твердых тел посредством использования методов мультифрактального анализа. Актуальность данной статьи обусловлена тем, что мультифрактальный подход дает возможность ставить в соответствии с изучаемой структурой не один, а целый спектр фрактальных размерностей, число которых в общем случае может быть бесконечным, и, тем самым, позволяет оценить трудно поддающиеся количественному описанию структурные характеристики сложных поверхностей. С учетом сказанного выше весьма актуальным представляется применение мультифрактального метода для анализа структуры поверхностей твердых тел. Проведена работа по выявлению особенностей структур поверхности твердых тел. Обоснована возможность применения методов мультифрактального подхода для описания структур по изображениям их топографии.

The article is devoted to classification of solids' surfaces by means of the multifractal analysis methods. The relevance of given article is caused by that the multifractal approach gives a chance to bring in accordance to the studied structure not only one, but entire spectrum of the fractal dimensions which number generally can be infinite and, thereby, it allows us quantify the hard, quantifiable description of the structural characteristics of complex surfaces. Taking into account aforesaid, very actual is application of multifractal method for the analysis of solids surfaces structures. The work on identifying particularities of surface structures of solids has been done. The possibility of the multifractal approach's application for description of the structures by the images of topography is given.

Бізді қоршаған ортада болатын құбылыстарды сипаттайтын динамикалық жүйелердің көбісі өте күрделі болатындықтан, олар математикалық талдаудың дәстүрлі әдістерімен толығымен айқындала алмайды. Сондықтан бүгінгі таңда құрылымы біртекті емес, статистикалық реттелген жүйелерді сипаттау үшін фракталдық геометрия талдауының әдістері қолданылады. Фракталдық түсініктердің физикадағы маңыздылығы күрделі жүйелерді зерттеуде айқындалады. Өзін-өзі реттеу құбылысы сызықты емес динамикалық жүйенің элементтері жүйе құрылымында реттеле бастауында айқын көрінеді, оның нәтижесінде тұрақты немесе тұрақты емес кеңістіктік құрылымдар пайда болады.

Фракталдар — өзіне-өзі ұқсастық қасиетіне ие, пішіні тілінген геометриялық объектілер. Өзіне-өзі ұқсастық фракталдың негізгі сипаттамасы ретінде фракталдың масштабтың кең диапазонында біркелкі құралған. Осылайша, үлкейту кезінде фракталдың кіші фрагменттері үлкен фракталға ұқсас болады. Идеалды жағдайда өзіне-өзі ұқсастық фракталдық объектінің созылуына байланысты инвариантты екендігі, яғни, оған дилатациялық симметрия тән. Дилатациялық симметрия масштаб өзгерісі кезінде фракталдың негізгі геометриялық ерекшеліктерінің өзгермейтіндігін болжайды. Фракталдарды көбінесе геометриялық, алгебралық және стохастикалық деп бөледі. Геометриялық фракталдар өзіне-өзі ұқсастық қасиеті ең көрнекі көрсетілетін фракталдар болып табылады. Мұндай объектілерге Серпинский үшбұрышы, Кантор жиынтығы, Серпинский салфеткасы және т.б. жатады. Алгебралық фракталдарды құру үшін қарапайым алгебралық формулалар арқылы берілетін сызықты емес суреттемелер итерациясы қолданады. Оларға Мандельброт жиынтығы, Жюлиа жиынтығы және т.б. жатады. Белгілі бір жағдайда стохастикалық фракталдар мультифракталдар деп те аталады.

Сондай-ақ табиғи және жасанды фракталдар деп те айқындайды. Жасанды фракталдар ғалымдар қолымен жасалғандықтан, кез келген масштабта фракталдық қасиетке ие. Ал табиғи фракталдардың «тіршілігіне» шектеу бар, себебі олардың фракталдық қасиеттері байқалатын белгілі бір максималды және минималды өлшемі болады.

Барлық тұрақты фракталдар масштабы инварианттық қасиетіне ие, олардың скейлингтік құрылымы бір масштабты көбейткішпен анықталады. Алайда нақты жағдайдың көбісінде масштабты көбейткіштер біртекті емес, ал фракталда скейлингтердің спектрі болады. Мұндай фракталдық құрылымдар мультифракталдар болып табылады және де шексіз өлшемдер жиынымен сипатталады. Бұл құрылымдарды зерттеуде қолданылатын әдіс тек талданатын үлгінің геометриясын ғана емес, сондай-ақ оның физика-химиялық қасиеттерінің мультифракталдық спектрінің параметрлерімен байланысын мультифракталдық өлшемдер түрінде анықтауға мүмкіндік береді.

Ұсынылып отырған мақала қатты денелердің беттерінің фракталдық құрылымын зерттеуде мультифракталдық талдаудың қолданылу аясына арналған. Мультифракталдық талдау фракталдық құрылымдарды мөлшерлік сипаттауға мүмкіндік беретін бірқатар статистикалық параметрлердің жиынын береді. Мұндай объектілердің маңызды ерекшелігі — оларды сипаттау үшін тек бір ғана фракталдық өлшемділікті емес, сонымен қатар мультифракталдың негізгі атрибуты болып табылатын спектрін де қолдану қажет.

Жүйенің мультифракталдық параметрлеріне Реньидің жалпыланған өлшемділігі және мультифрактал спектрінің функциясын жатқызады. Реньидің  $D_q$  жалпыланған фракталдық өлшемділігі спектрі зерттелінетін нүктелер жиынтығы қаншалықты тұрақты еместігін көрсетеді. Қарапайым  $D$  фракталдық өлшемділікті тұрақты фрактал жағдайында, барлық бос емес ұяшықтарда бірдей нүктелер саны болады (яғни фрактал бір текті болып табылады). Ал егер де нүктелердің ұяшықтар бойынша таралуы біркелкі болмаса, фрактал бір текті емес болады да, мультифрактал болып есептеледі, және де оны сипаттау үшін  $D_q$  жалпыланған өлшемділіктер жиыны (спектрі) қажет.

Реньи энтропиялары деп те аталатын,  $D_q$  жалпыланған өлшемділіктері мына қатынастармен анықталады:

$$D_q = \begin{cases} \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^N p_i^q & q \neq 1; \\ -\sum_{i=1}^N p_i \ln p_i & q = 1. \end{cases}$$

Мұндағы  $q_i$  —  $p_i$  берілген салмақ үшін сингулярлық көрсеткіш.  $D_q$  жалпыланған өлшемділігінің шамалары Лежандр түрлендірулерімен  $f(\alpha)$  мультифрактал спектрінің функцияларымен байланысты.  $f(\alpha)$  функциясының физикалық мағынасы,  $q$  берілген шамасында басыңқы үлесін беретін, бастапқы көптен кейбір бір текті фрактал жиынтығының Хаусдорфтық өлшемділігін береді. Әр түрлі  $\alpha$  кезінде  $f(\alpha)$  функциясының әр түрлі мәндерінің жиынтығы бастапқы көпті бөліп тастауға болатын, бір текті жиынтықтар фрактал өлшемділіктерінің спектрі болып табылады.

$D_q$  және  $f(\alpha)$  параметрлері зерттелетін жүйенің бір тектілік және реттілігінің дәрежесін анықтауға мүмкіндік береді.

Бір тектілік параметрі қарастырылатын құрылымның геометриялық бірдей учаскелерін  $p_i$  ықтималдылықтарымен сипаттауға болады. Құрылым элементтерінің бет бойынша тең ықтималды таралуынан ауытқу жүйедегі бір тектіліктің бұзылуының көрінісі болып табылады. Бір текті жүйе жоғарыда аталған ықтималдылықтардың жиынтығымен анықталатын  $f(\alpha)$  мультифрактал спектрінің параболалық функциясымен сипатталады. Осы жағдайда ең кіші шаршылар әдісімен орындалған  $f(\alpha)$  функциясының шаршылық аппроксимациясы  $R^2 = 1$  коэффициентімен анықталған. Жүйеде біртектілік дәрежесі жоғары болған сайын,  $f(\alpha)$  спектрі параболалықтан соншалықты үлкен ауытқитын болады, яғни  $0 < R^2 < 1$ . Осыдан  $R^2$  шамасын құрылымның бір тектілік көрсеткіші ретінде қабылдауға болады.

$\Delta$  реттілік параметрін  $D_1 - D_\infty$  айырымның көмегімен анықтауға болады, мұнда  $D_1$  ақпараттық өлшемділігі құрылым симметриясының бұзылу дәрежесін сипаттайды, ол белгілі бір ұяшықтағы нүктенің орналасқан жерін анықтайтын ақпаратты сипаттайтындықтан, осындай атқа ие болған және де ұяшық өлшемінің нольге ұмтылғандағы нүкте орнын анықтайтын ақпараттың қалай ұлғаятынын көрсетеді, ал  $D_\infty$  шамасы бастапқы параметрді анықтаудағы қатенің ықтималдылығымен байланысты. Сонда  $\Delta = D_1 - D_\infty$  шамасы үлкен болған сайын, жүйе реттілігінің дәрежесі соншалықты жоғары болады [1].

Жоғарыда аталған  $\Delta$  және  $R^2$  параметрлері жүйе элементтерінің жазықтықтарға таратудың негізгі үш типін айқындауға рұқсат етеді: бейберекет, мультифрактал және монофрактал. Жүйенің

элементтерін бейберекет тарату өз құрылымы бойынша бір текті ( $R^2 = 1$ ) және ретті болып табылмайды ( $\Delta \rightarrow 0$ ). Анықтама бойынша, мультифрактал бір текті емес ( $0 < R^2 < 1$ ), бірақ құрылымды құратын элементтердің орналасуындағы кейбір реттілігіне ие ( $\Delta \neq 0$ ). Өзіне-өзі ұқсас классикалық фракталдар (монофракталдар) абсолют бір тектілікпен ( $R^2 = 1$ ) және реттілікпен сипатталады. Олардағы барлық  $D_q$  жалпыланған фракталдық өлшемділіктер бір-біріне сәйкес келеді. Хаусдорфтық өлшемділік мультифракталдың ең қарапайым сипаттамасы болғандықтан, ол мультифракталдың статистикалық қасиеттері жайлы ақпарат бере алмайды. Жүйелі фракталдар үшін жалпыланған фракталдық өлшемділіктердің спектрі  $D = D(q = 0)$  бір Хаусдорфтық өлшемділікке азғындалатындықтан, онда осы жағдайда реттілік параметрін жоғарыда көрсетілген әдіспен есептеу мүмкін емес болып табылады.

Жүйеде элементтерді ретті және бейберекет таратуын, бірінші жағдайда екіншісімен салыстырғанда, үнемі кіші болатын, «энтропия» түсінігін қолдана отырып, айыруға болады.  $S$  ақпараттық энтропиясы құрылымның өзін-өзі реттеу деңгейін сипаттайды және құрылымның пайда болуы немесе жойылуы кезінде  $p_i$  ықтималдылығымен алынатын, синергетикалық ақпараттың орташа мәні ретінде анықталады [2]:

$$S = -\sum_i p_i \ln p_i, \sum_i p_i = 1.$$

Жалпы, табиғи фракталдық құрылымдар қатаң түрде тұрақты болмайды, олар әр түрлі кеңістіктік масштабтарда әр түрлі ұқсастық коэффициенттеріне ие. Мұндай объектілерді мультифракталдар деп атайды. Осы жұмыста қарастырылатын құрылымдар мультифракталдық объектілер, яғни құрамында әр түрлі фракталды өлшемділікке ие жиынтықшалары бар тұрақты емес фракталдық жиынтық ретінде, қарастырылды.

Беттерді олардың топографиясы бойынша іріктеу жүргізілді. Іріктеу нәтижесінде қатты денелердің беттері топталды. Олардың жалпы саны әзірге 10 дана. Топтарға мультифракталдық талдау жүргізіліп, жоғарыда аталған мультифракталдық параметрлер анықталды.

Талдау жүргізу үшін қолданылған «Мультифракталдық талдау» бағдарламасының жұмыс ретін келесідей суреттеуге болады: бағдарламаның зерттелінетін құрылымның суреті бар графикалық файлды оқуы; бұл ретте суретті алдын ала растрлық форматты 2 түсті кескінге айырбасталады (конвертация), суреттің пиксельдегі өлшемі суреттің өз өлшемімен анықталады.

Осыдан кейін суретті сандық форматқа енгізу жүреді, оның нәтижесінде компьютер жадына мәліметтердің екілік матрицасы енгізіледі, ол матрицаның әрбір элементіне суреттің 1 пикселі сәйкес келеді. Егер матрица элементіне сәйкес келетін кескін пикселі суреттегі белгілі бір құрылымдық құрылымға сәйкес келсе, онда оған «1» мәні беріледі, егер де пиксель басқа салмақ түсетін бетке сәйкес келсе, онда «ноль» мәні беріледі.

*Зерттелінетін құрылымды масштабты бөлу әдісін таңдау.* Сурет өлшеміне байланысты матрицаны есептеу жүргізілетін торларға бөлудің екі нұсқасы ұсынылады. Есептеудің бірінші нұсқасы матрицаны бөлуге оның өлшеміне еселі сан ұсынады. Бұл әдісті  $N$  элементтер саны жолы (бағанасы) бойынша жай сан болып табылмайтын шаршылы матрицаға қолданған ыңғайлы. Екінші әдістің дәлдігі төмендеу, себебі матрицаға салынатын тор ұяшықтарының өлшемі 2-ден  $N$ -ге дейінгі барлық мәндерді қабылдайды. Бұл кезде матрица шеттері бойынша нәтижелер мәндерінің бұзылуы мүмкін. Осылайша, ұяшықтың минималды өлшемі  $2 \times 2$  пиксель болса, максималды өлшемі суреттің барлық мөлшеріне сәйкес келеді.

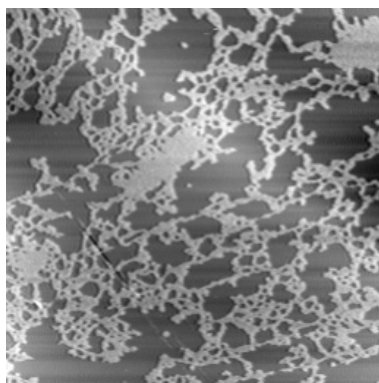
Мәліметтерді компьютерлік өңдеу, бұл кезеңде бағдарлама жоғарыда аталған мультифракталдық сипаттамалар бойынша есептеу жүргізеді. Реньидің жалпыланған өлшемділігін және мультифракталдық спектр функциясын есептеу диапазоны  $q \in [-100, 100]$  интервалында шектелген, себебі әрі қарай  $D_q$  және  $f(\alpha)$  шамаларының өзгерісі елеусіз. Кейбір мәлімет көздерінде, параметр өзгерісі интервалы  $-40 \leq q \leq 40$  жеткілікті деп есептелсе [3], басқа мәліметтер бойынша, интервалды  $-160 \leq q \leq 160$  дейін кеңейту қажет [4]. «Мультифракталдық талдау» бағдарламасының есептеу диапазонының максималды ықтимал мәні  $q \in [-700, 700]$  сәйкес келеді.

Математикалық фракталдың өзіне-өзі ұқсастықтың ең үлкен және ең кіші масштабтары болмау керек, яғни, жиынтықтың минималды элементтерінің өлшемі нольге ұмтылады, ал барлық жиынтықтың өлшемдері шексіз үлкен болу керек, дегенмен, кез келген физикалық құрылым шеткі ең кіші масштабқа ие, ал құрылым әрдайым шектелген кеңістікте орналасады. Бұл жағдай шекарадағы

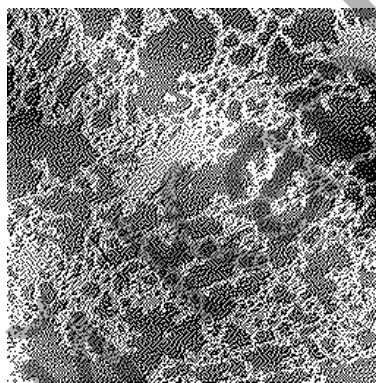
өзіне-өзі ұқсастықтың бұзылуына әкеледі, жиынтықтың шекарасындағы өте кіші аймақ құрылымның басқа бөлігіне ұқсас болмайды. Сондықтан кез келген табиғи фракталдық құрылымды фракталдар концепциясы шегінде сипаттау құрылымның болмыс масштабының максималды және минималды мәндерінен едәуір алшақ кеңістіктік масштабтарды қарастырғанда ғана дұрыс болады. Мультифракталдық сипаттамалар статистикалық болғандықтан, оларды құрылымның негізгі суретін бөлу бойынша орташа мәнге келтірген дұрыс.

*Есептелінген мәліметтерді шығару.* Бағдарлама зерттелінетін жүйенің  $D_q$  — Реньидің жалпыланған өлшемділігі;  $f(\alpha)$  — мультифрактал спектрінің функциясы;  $\Delta$  — реттілік параметрі; қарастырылатын жүйенің ақпараттық және хаостық энтропиялары сияқты фракталдық және синергетикалық параметрлерін есептейді. Сипаттамалар кестелік файл түрінде *.xls* форматта сақталады.

Төменгі 1–3 суреттерде беттер топографиясының кескіні көрсетілген. Бұл кескіндерге аталған бағдарлама қолданылды.

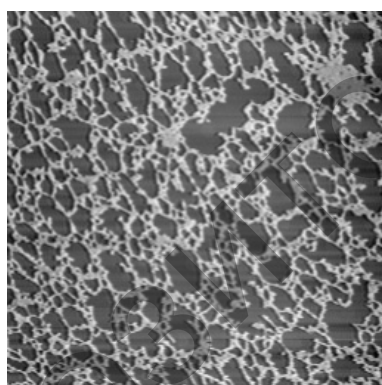


а

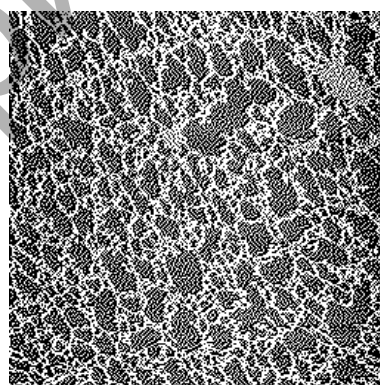


б

1-сур. 1-топтағы 1-ші беттің топографиялық өңделген кескіні (а) және беттің кейінгі бейнесі (б)

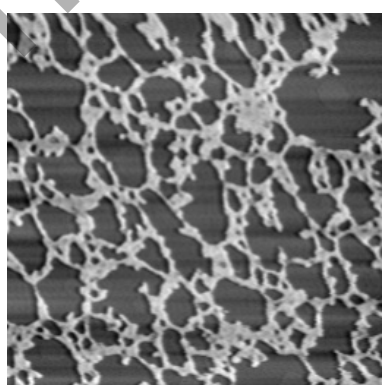


а

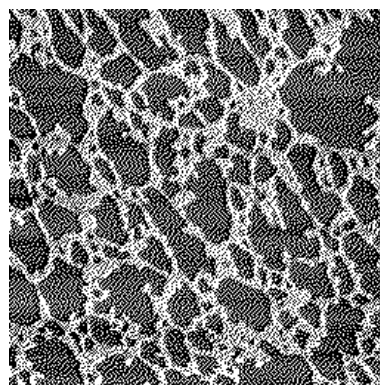


б

2-сур. 1-топтағы 2-ші беттің топографиялық өңделген кескіні (а) және беттің кейінгі бейнесі (б)



а



б

3-сур. 1-топтағы 3-ші беттің топографиялық өңделген кескіні (а) және беттің кейінгі бейнесі (б)

Әзірге атауы жоқ шартты түрде 1-топ деп аталатын жиындағы беттер жоғарыдағы суреттерде көрсетілген. Бұл беттер топографиясы бойынша іріктеу нәтижесінде бір ортақ топқа жинастырылды.

Мұндағы басты мақсат алынған беттерді белгілі бір топқа қатыстылығын олардың өлшемділік параметрлерін, яғни фракталдық, ақпараттық және де корреляциялық өлшемділіктерін, есептеу арқылы дәлелдеу, әр бетке жүргізілген мультифракталдық талдау нәтижелерін, яғни қажетті ақпаратты, іріктеу, және аталған параметрлер бойынша бір топтағы беттерге салыстырмалы талдау жүргізу болып табылады. Осылайша, барлық беттерді өңдеуден кейін топтарды өзара салыстыру жоспарлануда. Бірінші топтағы беттерді салыстыру нәтижесінде келесідей мәліметтер алынды (кестені қара).

К е с т е

Зерттелінетін беттердің негізгі фракталдық параметрлері

Өлшемділіктер	1-сурет	2-сурет	3-сурет
$D_0$	1,91	1,917	1,924
$D_1$	1,902	1,907	1,914
$D_2$	1,8961	1,9002	1,9063

Қарастырылып отырған беттердің фракталдық өлшемділік  $D_0$ , ақпараттық өлшемділік  $D_1$  және корреляциялық өлшемділік  $D_2$  — негізгі фракталдық параметрлерін салыстыру нәтижесінде оларды алдын ала осы топқа енгізу негізделгендігін көрсетеді. Жүргізілген жұмыс бойынша құрылымдарды әрі қарай зерттеу және де мультифракталдық талдау көмегімен реттеу жалғасуда.

## References

1. *Vertyagina E.N.* Using multifractal analysis to study the synergistic effects in complex systems // Vestnik of KarSU. — 2005. — № 3. — P. 33–36.
2. *Haken G.* Information and Self-Organization. — М.: Mir, 1991. — P. 240.
3. *Halsey T.C., Jensen M.H. et al.* Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets // Phys. Rev. A. — 1986. — Vol. 33. — № 2. — P. 1141–1151.
4. *Oksogoyev A.A.* Fractal-synergetic concept of managing the processing and synthesis of metallic materials // Proceedings of the conference «Mathematical modeling of processes in synergetic systems». — Ulan-Ude, 1999. — P. 31–54.