УДК 510.67

А.Р.Ешкеев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: Modth1705@mail.ru)

Сильно минимальные йонсоновские множества

В статье введены и рассмотрены понятия минимальных йонсоновских множеств и, соответственно, сильно минимальных йонсоновских множеств. На этой основе введено понятие независимости специальных подмножеств экзистенциально замкнутой подмодели семантической модели, которое приводит к понятию базиса, и далее мы имеем йонсоновский аналог теоремы о несчетной категоричности.

Ключевые слова: йонсоновская теория, йонсоновское множество, фрагмент йонсоновского множества, решётка экзистенциальных формул йонсоновской теории.

Данная статья посвящена изучению понятия йонсоновского множества и его применения. Понятие йонсоновского множества было определено в [1], и в дальнейшем были получены результаты, которые были доложены в [2–4]. Понятие сильной минимальности как для множеств, так и для теорий сыграли решающую роль при получении результата об описании несчетно-категоричных теорий [5].

Хорошо известно, что йонсоновские теории представляют собой естественный подкласс такого широкого класса теорий, как класс индуктивных теорий. Кроме того, основные примеры теорий алгебр являются примерами индуктивных теорий, и они, как правило, представляют пример неполных теорий. При этом современный аппарат теории моделей развивался в основном для полных теорий, поэтому на сегодняшний день техника изучения неполных теорий заметно беднее, чем для полных.

С одной стороны, условия Йонсона — это естественные алгебраические требования, которые возникают при изучении широкого класса алгебр. С другой — естественных примеров йонсоновских теорий достаточно много, это, например, теории булевых алгебр, абелевых групп, полей фиксированной характеристики, полигонов и т. д. Все эти примеры важны как в алгебре, так и в различных областях математики. Как видно из перечисленного списка, сфера применения техники, развитой для изучения йонсоновских теорий, может быть достаточно широка.

Таким образом, всё сказанное выше говорит о том, что изучение теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий является актуальной задачей.

Из опыта изучения индуктивных теорий [6] следует, что йонсоновские теории, как подкласс индуктивных теорий, представляют собой такую часть, в которой есть определенные методы исследования неполных теорий, а именно метод переноса свойств первого порядка центра йонсоновской теории на саму йонсоновскую теорию. Об этом методе и об исследованиях в рамках изучения йонсоновских теорий, имеющих отношение к материалу данной статьи, мы можем отослать читателя к источникам [7–10].

Как было замечено выше, основная техника, связанная с более тонкими методами исследования поведения элементов модели, относится к прерогативе техники исследования полных теорий. Поэтому, даже стараясь просто найти обобщение стандартных понятий из арсенала полных теорий, мы можем натолкнуться либо на тавтологию, либо на понятие, которое технически неоправданно. Отсюда и были предложены йонсоновские множества. Напомним основные определения из [1], которые связаны с этими множествами.

Пусть задан произвольный язык L.

Теория T называется йонсоновской, если она:

1) имеет бесконечные модели;

2) индуктивна;

3) обладает свойством совместного вложения (JEP);

4) обладает свойством амальгамы (AP).

Йонсоновская теория T называется совершенной теорией, если семантическая модель насыщенна.

Пусть T — йонсоновская совершенная теория, полная для экзистенциальных предложений в языке L и ее семантическая модель есть C.

Мы говорим, что множество X Σ-определимо, если оно определимо некоторой экзистенциальной формулой.

а) Множество X называется йонсоновским в теории T, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

– X есть Σ-определимое подмножество C;

– dcl (X) есть носитель некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели C.

б) Множество X называется алгебраически йонсоновским в теории T, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

– X есть Σ-определимое подмножество C;

– acl (X) есть носитель некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели C.

Из определения йонсоновских множеств видно, что они устроены очень просто в смысле ранга Морли [1]. Получается, что элементы из теоретико-множественной разности (лунки) замыкания и множества имеют ранг 0, т.е. они все алгебраические. А значит, это тот случай, когда мы можем работать с элементами даже и в неполном случае.

Второй момент полезности такого определения йонсоновского множества заключается в том, что мы, замыкая данное множество, сразу получаем некоторую экзистенциально замкнутую модель. Это, в свою очередь, дает нам определить йонсоновский фрагмент сначала у рассматриваемого множества, а в принципе — и у произвольной теории.

На данный момент достаточно хорошо изученными являются совершенные йонсоновские теории. Для них был доказан критерий совершенности [7], что позволило получить многие теоретико-модельные факты относительно йонсоновской теории и ее центра. Имеются полные описания как центра таких теорий, так и классов их моделей.

Если в случае изучения полных теорий мы имеем в основном дело с двумя объектами — это сама теория и ее модели, то в случае изучения йонсоновской теории мы в качестве моделей рассматриваем класс эзистенциально замкнутых моделей рассматриваемой теории, а также дополнительным условием является некоторая полнота рассматриваемой теории в логическом смысле. Как минимум, рассматриваемая теория должна быть экзистенциально полна. Дадим определения йонсоновского фрагмента. Будем говорить, что все $\forall\exists$-следствия произвольной теории создают йонсоновский фрагмент этой теории, если дедуктивное замыкание этих $\forall\exists$-следствий есть йонсоновская теория. В силу того, что это не всегда верно, было бы интересно уметь выделять у произвольной теории такую часть, которая будет йонсоновской теорией. Такая задача имеет место быть хотя бы в силу того, что морлизация произвольной теории нам это обеспечивает, более того, полученная теория совершенна [6].

Другой путь — использование такого факта, что любая счетная модель индуктивной теории обязательно вложится изоморфно в некоторую экзистенциально замкнутую модель рассматриваемой теории [6]. Далее рассматриваем все $\forall\exists$-предложения, истинные в этой модели. Тогда в случае йонсоновской теории хорошо известен тот факт, что $\forall\exists$-предложения, истинные в данной экзистенциально замкнутой модели, образуют йонсоновскую теорию. В противном случае на данный момент, кроме обогащения сигнатуры (случай сколемизации и морлезации [6]), у нас нет способа достичь йонсоновости теории.

Для изучения поведения элементов лунки в случае йонсоновских множеств мы всегда можем рассмотреть $\forall\exists$-следствия, истинные в указанных выше замыканиях йонсоновского множества. В силу сказанного выше, в том случае, что рассмотренное множество предложений будет йонсоновской теорией.

Полученная таким образом йонсоновская теория будет называться йонсоновским фрагментом соответствующего йонсоновского множества. Понятно, что мы можем проводить исследование йонсоновских фрагментов относительно связи с первоначальной теорией, что является новой постановкой задачи исследовании йонсоновских теорий.

Основной задачей данной статьи является в рамках данных нововведенных определений рассмотреть и попытаться описать сильно минимальные йонсоновские множества. Это, в свою очередь, повлечет за собой целый ряд новых постановок задач, например, уточнение теоремы Лахлана-Болдуина в рамках нововведенной тематики.

Напомним, что йонсоновская теория T имеет семантическую модель C достаточно большой мощности. Если эта модель является насыщенной, то данная йонсоновская теория называется совершенной. Семантические модели совершенной йонсоновской теории однозначно определяются своей мощностью. Далее, так как мы будем иметь дело с совершенными йосоновскимим теориями, нам удобно работать внутри некоторой большой семантической экзистенциально замкнутой модели, содержащей все остальные экзистенциально замкнутые модели рассматриваемой совершенной йонсоновской теории. Назовем эту модель универсальной экзистенциальной областью (УЭО).

Ее можно также охарактеризовать следующими условиями.

1. Каждая модель данной теории изоморфна, вложима в $C^{Б}$.

2. Каждый изоморфизм между двумя подмоделями продолжается до автоморфизма модели *C*.

Мы будем рассматривать не все подмножества *C*, а только йонсоновские подмножества.

Для любых Σ-определимых подмножеств семантической модели мы имеем верный следующий результат.

Лемма 1. Σ-определимое подмножество семантической модели определимо над множеством параметров *A* из семантической модели, если и только если оно инвариантно относительно всех автоморфизмов модели С, оставляющих на месте каждый элемент из *A*.

Отсюда следует, что определимое замыкание dcl (*A*) йонсоновского множества *A*, т.е. множество всех элементов, определимых над *A*, совпадает с множеством элементов, инвариантных относительно всех автоморфизмов над *A*.

Из леммы 1 вытекает, что элемент *b* алгебраичен над *A*, если и только если он имеет лишь конечное число элементов, сопряженных над *A*.

Определим ранг Морли для экзистенциально определимых подмножеств семантической модели.

Мы хотим приписать каждому Σ-определимому подмножеству *D* из семантической модели порядковое число (или, возможно, -1 или ∞) — его ранг Морли, обозначаемый через *MR*. Сначала определим отношение $MR(D)\geq\alpha$ посредством рекурсии по ординалу α.

Пусть *T* — совершенная йонсоновская теория, *C* — ее УЭО.

Определение 1. $MR(D)\geq 0,$ если и только если *D* непусто;

– $MR(D)\geq\lambda,$ если и только если $MR(D)\geq\alpha$ при всех $\alpha<\lambda$ (λ — предельный ординал);

– $MR(D)\geq(\alpha+1),$ если и только если в *D* существует бесконечное семейство (D_i) попарно непересекающихся Σ определимых подмножеств, таких что $MR(D)_i\geq\alpha$ при всех *i*.

Тогда ранг Морли класса *D* равен $MR(D)=\sup\left\{\dfrac{\alpha}{MR(D)}\geq\alpha\right\}.$

Причем будем считать, что $MR(\varnothing)=-1$ и $MR(D)=\infty,$ если 48/ для всех α (в последнем случае будем говорить, что *D* не имеет ранга).

Заметим,что Σ-определимый класс имеет ранг -1, если он пуст; ранг 0, если он конечен; ранг 1, если он бесконечен, но не содержит бесконечного семейства непересекающихся бесконечных Σ-определимых классов.

Лемма 2. Справедливо соотношение $MR(D_1\cup D_2)=\max\left(MR(D_1),MR(D_2)\right).$

Определение 2. Степень Морли $Md(D)$ йонсоновского подмножества *D* из семантической модели, имеющего ранг Морли $\alpha,$ — это максимальная длина d его разложения $D=D_1\cup\ldots\cup D_d$ на непересекающиеся экзистенциально определимые подмножества ранга α.

В случае ранга 0 степень экзистенциально определимого подмножества *D* — это просто число его элементов. Если экзистенциально определимое подмножество не имеет ранга, то не определена и его степень Морли.

Рассмотрим йонсоновски минимальные множества. Далее под структурой понимается модель сигнатуры или языка L рассматриваемой йонсоновской теории.

Пусть M — структура, и пусть $D\subseteq M^n$ — бесконечное Σ-определяемое подмножество. Мы говорим, что *D* является минимальным в M, если для любого Σ-определяемого $Y\subseteq D$ либо Y конечно, либо *D*/*Y* конечно. Если $\varphi(\bar{v},\bar{a})$ является формулой, которая определяет *D*, то мы также можем сказать, что $\varphi(\bar{v},\bar{a})$ минимальна.

Мы говорим, что D и φ йонсоновски сильно минимальны, если φ минимальна в любом экзистенциально замкнутом расширении N из M.

Будем говорить, что теория T йонсоновски сильно минимальна, если $\forall M \in E_T, M$ является йонсоновски сильно минимальной.

Рассмотрим пример алгебраического замыкания в нескольких йонсоновски сильно минимальных теориях.

Если K — алгебраически замкнутое поле и $A \subseteq K$, то $acl(A)$ является алгебраическим замкнутым подполем, порожденным A.

Следующие свойства алгебраического замыкания верны для любого алгебраически йонсоновского множества D.

i) $acl\left(acl(A)\right) = acl(A) \supseteq A.$

ii) Если $A \subseteq B$, то $acl(A) \subseteq acl(B).$

iii) Если $a \in acl(A)$, тогда $a \in acl(A_0)$ для некоторого конечного $A_0 \subseteq A.$

Более тонкое свойство верно, если D йонсоновски сильно минимально.

Лемма о замене. Предположим, что D — подмножество семантической модели рассматриваемой теории и оно йонсоновски сильно минимально, $A \subseteq D$ и $a, b \in D$. Если $a \in acl(A \cup \{b\}) \setminus acl(A)$, тогда $b \in acl\left(A \cup \{a\}\right)$.

Замечание. Йонсоновски сильно минимальное множество — это экзистенциально определимое подмножество семантической модели рассматриваемой теории ранга 1 и степени 1 в смысле Морли.

Определение 2. 1. Йонсоновская теория T йонсоновски тотально трансцендентна, если каждое экзистенциально определимое подмножество ее семантической модели имеет ранг Морли.

2. Теория T является йонсоновски ω-стабильной, если число экзистенциальных типов счетно для каждого счетного А подмножества семантической модели.

Теорема 1. Йонсоновская теория T йонсоновски тотально трансцендентна, если и только если она йонсоновски ω-стабильна.

Лемма 3. Пусть a и b — произвольные элементы семантической модели. Если элемент b алгебраичен над A и a, где A — экзистенциально определимое подмножество семантической модели, то $MR\left(\frac{b}{A}\right) \leq MR\left(\frac{a}{A}\right).$

Следствие 1. Пусть M — некоторая ω-насыщенная экзистенциально замкнутая подмодель семантической модели, а φ — некоторая $L(M)$-формула ранга α и степени Морли d. Тогда можно разложить φ на $L(M)$-формулы $\varphi_1,...,\varphi_m$ ранга α и степени 1.

Во всяком йонсоновски сильно минимальном множестве мы можем определить понятие независимости, обобщающее линейную независимость в векторных пространствах и алгебраические независимости в алгебраически замкнутых полях.

Зафиксируем $M \models T$ и D йонсоновски сильно минимальное множество в M — экзистенциально-замкнутую подмодель семантической модели йонсоновской теории T.

Определение 2. Будем говорить, что $A \subseteq D$ независимо, если $a \notin acl\left(A \setminus \{a\}\right)$ для всех $a \in A$. Если $C \subset D$, мы говорим, что A независимо над C, если $a \notin acl\left(C \cup \left(A \setminus \{a\}\right)\right)$ для всех $a \in A$.

Мы покажем, что бесконечные независимые множества являются множествами неразличимых элементов.

Лемма 3. Пусть T — йонсоновски сильно минимальная теория и $\varphi(\upsilon)$ является йонсоновски сильно минимальной формулой с параметрами из A, где либо $A = \varnothing$, либо $A \subseteq M_0$ где $M_0 \models E_T, M_0 <_1 M$, и $M_0 <_1 N$. Если $a_1,...,a_n \in \varphi(M)$ независимы над A и $b_1,...,b_n \in \varphi(N)$ являются независимыми над A, то полные экзистенциальные типы $tp^M\left(\frac{\bar{a}}{A}\right), tp^N\left(\frac{\bar{b}}{A}\right)$ равны между собой.

Следствие 1. Если $M, N \models T$ и $\varphi(\upsilon)$, как указано выше, B представляет собой бесконечное подмножество $\varphi(M)$, независимое над A и C, является бесконечным подмножеством $\varphi(N)$, независимым над A, тогда B и C являются бесконечными множествами неразличимых того же типа над A. Таким образом, мощность однозначно определяет независимые подмножества D.

Определение 3. Будем говорить, что *A* является базисом для $Y \subseteq D$, если $A \subseteq Y$ независимо и $acl(A) = acl(Y)$.

Очевидно, что любое максимально независимое подмножество *Y* является базисом для *Y*. Так же как в векторных пространствах и в алгебраически замкнутых полях, любые два базиса имеют одинаковую мощность.

Пусть $I(E_T, \chi_0)$ обозначает число счетных экзистенциально замкнутых моделей йонсоновской теории *T*.

Используя технику доказательств для полных теорий и изменяя соответствующие понятия на технику йонсоновских множеств, мы можем доказать йонсоновские аналоги соответствующих результатов в спектре счетных моделей [6].

Следствие 1. Если *T* — сильно минимальная йонсоновская теория, полная для экзистенциальных предложений, то *T* является k-категорическим для $k \geq \chi_1$ и $I(E_T, \chi_0) \leq \chi_0$.

Следствие 2. Если *T* — йонсоновская теория, полная для экзистенциальных предложений, является несчетно категоричной и есть йонсоновски сильно минимальная L-формула, то она либо $T\chi_0$-категорична, либо $I(E_T, \chi_0) = \chi_0$.

Теорема 2. Если *T* — йонсоновская теория, полная для экзистенциальных предложений, является несчетно категоричной, но не χ_0-категоричной, то $I(E_T, \chi_0) = \chi_0$.

Определение 4. Йонсоновская стабильность (J-стабильность). Пусть *T* — йонсоновская теория, $S^J(X)$ — множество всех экзистенциальных полных n-типов над *X*, в соответствии с *T*, для любого конечного *n*. Мы будем говорить, что йонсоновская теория *T J*-λ-стабильна, если для любой *T*-экзистенциально-замкнутой модели, для любого подмножества *X* из A . $|X| \leq \lambda \Rightarrow |S^J(X)| \leq \lambda$. .

Теорема 3. Если *T* — йонсоновски суперстабильна, но не χ_0-категорична, то $I(E_T, \chi_0) = \chi_0$.

Стабильность йонсоновских множеств. Пусть *X* — йонсоновское множество и *M* экзистенциально замкнутая модель, где $dcl(X) = M$. Рассмотрим $Th_{\forall\exists}(M) = T_M$.

Лемма 2. T_M будет йонсоновской теорией.

Теорема 1. Пусть T_M, как описано выше. Если $\lambda \geq \omega$, то следующие условия эквивалентны: (1) T_M-стабильна; (2) T^* λ-стабильна, где T^* является центром *T*.

Рассмотрим ω-категоричность йонсоновских множеств.

Теорема 2. Пусть T_M, как описано выше. Тогда следующие условия эквивалентны: (1) ${T^*}_M - \omega$-категорична; (2) $T_M - \omega$-категорична.

Алгебраически простое расширение для йонсоновских множеств.

Определение 9. Пусть $T_M^* A, B \in E_T$ и $T_M^* A \subset B$. Тогда *B* называется алгебраически простым расширением *A* в E_T, если для любой модели $C \in E_T$ таким образом, что если *A* изоморфно вкладывается в *C*, то и *B* изоморфно вкладывается в *C*.

ω_1 — категоричность йонсоновских множеств. Пусть *X* — алгебраически йонсоновское множество, $acl(X) = M$ — формула, которая определяет множество *X*, является экзистенциально сильно минимальной.

Теорема 3. Тогда эквивалентны следующие условия: (1) $T_M^* - \omega$-категорична; (2) любая счетная модель $T_M^* \, E_{T_M}$ имеет простое алгебраическое расширение в E_{T_M}.

Все неопределенные в этой статье определения понятий, а также более полную информацию о йонсоновских теориях можно получить в [7].

Список литературы

1 *Ешкеев А.Р.* Йонсоновские множества и их некоторые теоретико-модельные свойства // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2014. — № 2 (74). — С. 53–62.

2 *Yeshkeyev A.R.* The similarity of Jonsson sets: Abstracts. V congress of the Turkic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Issyk-Kul (June, 5–7), 2014. — P. 217.

3 *Yeshkeyev A.R.* Jonsson sets and some of their model-theoretic properties. Abstracts Book. International Congress of Mathematicians. — Seoul, Korea (August, 13–21), 2014 — P. 8.

4 *Yeshkeyev A.R.* On Jonsson sets and some their properties. Abstracts Book Logic. Colloquium, Logic, Algebra and Truth Degrees, Vienna Summer of Logic (July, 9–24), 2014. — P. 108.

5 *Baldwin John T., Lachlan Alistair H.* On Strongly Minimal Sets, Journal of Symbolic Logic. — 1971. — Vol. 36. — № 1. — P. 79–96.

6 Справочная книга по математической логике: В 4 ч. / Под ред. Дж.Барвайса. — Ч. 1.Теория моделей / Пер. с англ. — М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 126 с.

7 *Ешкеев А.Р.* Йонсоновские теории. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. — 250 с.

8 *Ешкеев А.Р.* Счетная категоричность Δ - PM -теорий: Тез. 12-й Межвуз. конф. по математике, механике и информатике. — Алматы, 2008.

9 *Ешкеев А.Р., Мейрембаева Н.К.* Свойства $(\Sigma^+_{n+1},\Sigma^+_{n+1})$ -атомных моделей T - Δ - PM -теории // Вестн. КазНУ. Сер. Математика, Механика, Информатика. — Спец. вып. — 2008. — № 3. — С. 74–77.

10 *Ешкеев А.Р.* О йонсоновской стабильности и некоторых её обобщениях // Фундаментальная и прикладная математика. МГУ: ЦНИТ. — 2008. — Вып. 8. — С. 117–128.

А.Р.Ешкеев

Қатты минималды йонсондық жиындар

Мақалада минималды йонсондық жиындар мен қатты минималды йонсондық жиындар ұғымдары беріліп, қарастырылған. Сол негізде семантикалық үлгінің экзистенциялық тұйық подмоделінің арнайы жиын тәуелсіздігі түсінігі енгізілді. Тәуелсіздік ұғымы базис түсінігіне әкеліп, әрі қарай біз есеп-қисапсыз кесімді іспеттес теоремасын аламыз.

A.R.Yeshkeyev

Strongly minimal jonsson sets

This paper introduced and discussed the concepts of minimal Jonsson sets and respectively strongly minimal Jonsson sets. On this basis, we introduce the concept of independence of special subsets of existentially closed submodel of semantic model. The concept of independence leads to the concept of basis and then we have the Jonsson analogue of the theorem on uncountable categoricity.

References

1 Yeshkeyev A.R. *Bull. of KSU*, Series of Mathematics, 2014, 2 (74), p. 53–62.

2 Yeshkeyev A.R. *The similarity of Jonsson sets. Abstracts. V congress of the Turkic World Mathematicians*. Kyrgyzstan, Issyk-Kul, June, 5–7, 2014, p. 217.

3 Yeshkeyev A.R. *Jonsson sets and some of their model-theoretic properties. Abstracts Book. International Congress of Mathematicians, August, 13–21*, Seoul, Korea, 2014, p. 8.

4 Yeshkeyev A.R. *On Jonsson sets and some their properties. Abstracts Book Logic. Colloquium, Logic, Algebra and Truth Degrees. Vienna Summer of Logic*, July, 9–24, 2014, p. 108.

5 Baldwin, John T. Lachlan Alistair H. *Journal of Symbolic Logic*, 1971, 36, p. 79–96.

6 *Handbook of mathematical logic: In 4 parts* / Ed. Dzh.Barvaysa, part 1. Teoriya models: Per. from Engl., Moscow: Nauka: Home Editorial physical and mathematical literature, 1982, 126 p.

7 Yeshkeyev A.R. *Jonsson theory*, Karaganda: Publ. KSU, 2009, 250 p.

8 Yeshkeyev A.R. *Countably categorical-theory. Abstracts. 12th Inter-College Conference on Mathematics, Mechanics and Informatics*, Almaty, 2008.

9 Yeshkeyev A.R., Meyrembaeva N.K. *Bulletin of the KNU*, Ser. of Mathematics, Mechanics, Computer science, 2008, 3, Special Issue, p. 74–77.

10 Yeshkeyev A.R. *Fundamental and applied mathematics*, 8, MSU, CNIT, 2008, p. 117–128.