

ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕРДІҢ  
ЖАҢА ЖАЛПЫ ШЕШІМІ ТУРАЛЫ

Асанова А.Т.

Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

E-mail: assanova@math.kz

Дифференциалдық теңдеулер теориясынан жәй дифференциалдық теңдеулер мен Вольтерра интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімі ұғымы белгілі. Аталған теңдеулердің жалпы шешімі әруақытта бар болады және оның көмегімен шешімнің қасиеттерін жан-жақты зерттеп, шеттік есептердің шешілімділігі, бірімәнді шешілімділігі шарттары орнатылады. Ал, Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін жалпы шешімнің бар болуы мәселесі бірқатар қиындықтар туғызады. Атап кетсек, Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің шешімі мүлде болмауы мүмкін [1]. Осыған байланысты, Д.Жұмабаев Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін жаңа жалпы шешім анықтамасын енгізіп, оның қасиеттерін зерттеді [2].

Осы жұмыста интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін енгізілген жаңа жалпы шешім анықтамасы мен оның қасиеттері қарастырылады. Жаңа жалпы шешім көмегімен интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді зерттеу жолдары мен шешілімділік шарттары баяндалады. Сонымен қатар, жаңа жалпы шешімнің дифференциалдық теңдеулердің бірқатар кластары үшін шеттік есептерді шешуге пайдалану жолдары мен қолданыс аясы талқыланады.

$[0, T]$  аралығында Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t, s)x(s)ds + f(t), x \in R^n, t \in (0, T) \quad (1)$$

мұнда  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))'$ - нөлшемді ізделінді вектор-функция,  $A(t)$  -  $(n \times n)$  нөлшемді  $[0, T]$  аралығында үзіліссіз матрица,  $K(t, s)$  -  $(n \times n)$  нөлшемді  $[0, T] \times [0, T]$  облысында үзіліссіз матрица,  $f(t)$  - нөлшемді  $[0, T]$  аралығында үзіліссіз вектор-функция.

(1) интегралдық-дифференциалдық теңдеулерінің *шешімі* деп  $(0, T)$  аралығында үзіліссіз дифференциалданатын, теңдеулер жүйесін барлық  $t \in (0, T)$  үшін қанағаттандыратын  $x(t) \in C([0, T], R^n)$  вектор-функциясын айтамыз.

$\Delta_N$  арқылы келесі бөліктеуді белгілейік:  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$ .  $x(t)$  ретінде  $t = t_p, p = \overline{1, N-1}$  нүктелерінде үзілісті болуы мүмкін,  $[0, T]$  аралығында бөлікті-үзіліссіз функциясын анықтайық.  $x_r(t)$  функциясы  $x(t)$  функциясының  $[t_{r-1}, t_r]$   $r$ -ші аралығындағы сығылуы болсын, яғни  $x_r(t) = x(t), t \in [t_{r-1}, t_r], r = \overline{1, N}$ .

Оған қоса, егер  $x(t)$  функциясы  $(0, T)$  аралығында бөлікті үзіліссіз дифференциалданса және (1) Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуін әрбір  $t \in (0, T) \setminus \{t_p, p = \overline{1, N-1}\}$  нүктелерінде қанағаттандырса, онда оның  $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))'$  сығылуларының жүйесі келесі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t, s)x_j(s)ds + f(t), t \in (t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}. \quad (2)$$

$C([0, T], \Delta_N, R^{nN})$  арқылы  $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$  функциялар жүйелерінің кеңістігін белгілейік, мұнда  $x_r : [t_{r-1}, t_r] \rightarrow R^n$ , үзіліссіз және кез келген  $r = \overline{1, N}$  үшін ақырлы  $\lim_{t \rightarrow t_r-0} x_r(t)$  сол жақ шегі бар, нормасы келесідей  $\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r]} \|x_r(t)\|$ .

$x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))' \in C([0, T], \Delta_N, R^{nN})$  функциялар жүйесі (2) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі деп аталады, егер  $x_r(t)$  функциялары  $(t_{r-1}, t_r)$  аралығында үзіліссіз дифференциалданса және (2) теңдеулерін қанағаттандыратын болса, мұнда  $r = \overline{1, N}$ .

$\lambda_r$  параметрлерін  $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$  түрінде енгізейік,  $r = \overline{1, N}$ . Жаңа белгісіз  $u_r(t)$  функциясын анықтайық:  $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ ,  $t \in [t_{r-1}, t_r]$ ,  $r = \overline{1, N}$ .

Егер (2) теңдеулер жүйесінде әрбір  $[t_{r-1}, t_r]$  аралығында  $x_r(t)$  функциясын  $u_r(t) + \lambda_r$  қосындысымен алмастырсақ, параметрлері бар келесі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t, s)[u_j(s) + \lambda_j] ds + f(t), t \in (t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Енгізілген параметрлер осы теңдеулерді төмендегі бастапқы шарттармен толықтыруға мүмкіндік береді

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \quad (4)$$

(3), (4) есебі параметрлері бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі деп аталады. (2) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі (3), (4) параметрлері бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебіне пара-пара болады.  $X_r(t)$  матрицасы  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$  дифференциалдық теңдеулер жүйесінің  $[t_{r-1}, t_r]$  аралығындағы біртегіс матрицасы болсын.

(3), (4) есебі келесі интегралдық теңдеулер жүйесіне пара-пара болады:

$$u_r(t) = X_r(t) \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau_1) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau_1, \tau)[u_j(\tau) + \lambda_j] d\tau d\tau_1 + X_r(t) \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau_1) A(\tau_1) d\tau_1 \lambda_r + X_r(t) \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau_1) f(\tau_1) d\tau_1, t \in [t_{r-1}, t_r], r = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Егер  $u(t) = \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau_1, \tau) u_j(\tau) d\tau$  десек, бірқатар есептеулерден кейін келесі түрдегі интегралдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$y(t) = \int_0^T M(\Delta_N, t, \tau) y(\tau) d\tau + \sum_{r=1}^N D_r(\Delta_N, t) \lambda_r + F(\Delta_N, t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

мұнда  $M(\Delta_N, t, \tau)$  өзегі,  $D_r(\Delta_N, t)$  және  $F(\Delta_N, t)$  төмендегі теңдіктермен анықталады:

$$\begin{aligned} M(\Delta_N, t, \tau) &= \int_{\tau}^{t_1} K(t, \tau_1) X_1(\tau_1) d\tau_1 X_1^{-1}(\tau), \quad t \in [0, T], \quad \tau \in [0, t_1], \\ M(\Delta_N, t, \tau) &= \int_{\tau}^{t_j} K(t, \tau_1) X_j(\tau_1) d\tau_1 X_j^{-1}(\tau), \quad t \in [0, T], \quad \tau \in (t_{j-1}, t_j], j = 2, \dots, N, \\ D_r(\Delta_N, t) &= \int_{t_{r-1}}^{t_r} K(t, \tau) X_r(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X_r^{-1}(\tau_1) A(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t, \tau) X_j(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X_j^{-1}(\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{t_r} K(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 d\tau, \quad r = \overline{1, N}, \\ F(\Delta_N, t) &= \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t, \tau) X_j(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X_j^{-1}(\tau_1) f(\tau_1) d\tau_1 d\tau. \end{aligned}$$

Кез келген  $\Delta_N$  бөліктеуін алайық және сәйкес біртекті интегралдық теңдеуді қарастырайық

$$y(t) = \int_0^T M(\Delta_N, t, \tau) y(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (7)$$

1 Анықтама.  $\Delta_N$  бөліктеуі (1) теңдеуі үшін регулярлы деп аталады, егер (7) интегралдық теңдеуінің тек қана тривиалды шешімі болса.

$\sigma([0, T])$  арқылы  $[0, T]$  аралығының регулярлы бөліктеулерінің жиынын белгілейік.

2 Анықтама. (3), (4) арнайы Коши есебі бірмәнді шешілімді деп аталады, егер кез келген  $(f(t), \lambda)$  жұбы үшін, мұнда  $f(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^{nN}$ , осы есептің жалғыз шешімі бар болатын болса.

1 Лемма.  $\Delta_N$  бөліктеуіне сәйкес болатын (3), (4) арнайы Коши есебі бірмәнді шешілімді болады сонда тек сонда ғана, егер  $\Delta_N$  бөліктеуі регулярлы болса.

3 Анықтама.  $\Delta_N \in \sigma([0, T])$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^{nN}$  болсын және  $u[t, \lambda] = (u_1(t, \lambda), u_2(t, \lambda), \dots, u_N(t, \lambda))$  функциялар жүйесі (3), (4) параметрлері бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешімі болсын. Онда келесі

$$x(\Delta_N, t, \lambda) = \lambda_r + u_r(t, \lambda), \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, N},$$

$$x(\Delta_N, T, \lambda) = \lambda_r + \lim_{t \rightarrow T-0} u_r(t, \lambda)$$

теңдіктерімен анықталған  $x(\Delta_N, t, \lambda)$  функциясы (1) интегралдық-дифференциалдық теңдеулерінің  $\Delta_N$  жалпы шешімі деп аталады.

This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant AP08855726).

### Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized Inverse Operators and Fredholm BounDary-Value Problems, VSP, Utrecht, Boston, 2004.
2. Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems. Journal of Computational and Applied Mathematics. 327 (2018), 79–108.

### ПЕРФОРАЦИЯЛАНҒАН ОБЛЫСТАГИНЗБУРГ-ЛАНДАУ КОМПЛЕКСТІ ТЕНДЕУІНІҢ ТРАЕКТОРИЯЛЫҚ АТТРАКТОРЛАРЫН ОРТАШАЛАУ

Бекмаганбетов К.А.<sup>1</sup>, Төлеміс А.Ә.<sup>2</sup>, Чечкин Г.А.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>М.В.Ломоносов атындағы ММУ, Қазақстан филиалы, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан

<sup>2</sup>Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан

<sup>3</sup>М.В.Ломоносов атындағы ММУ, Мәскеу қ., Ресей

E-mail: [bekmaganbetov-ka@yandex.kz](mailto:bekmaganbetov-ka@yandex.kz); [abylaikhan9407@gmail.com](mailto:abylaikhan9407@gmail.com); [checkin@mech.math.msu.su](mailto:checkin@mech.math.msu.su)

Дербес туынды диссипативті теңдеулер үшін траекториялық аттракторлар теориясы әзірленген [1]. Бұл тәсілге сәйкес Коши есептері үшін шешімдерінің жалғыздығы әлі дәлелденбеген (мысалы, 3D Навье-Стокс жүйесі) немесе орындалмаған (мысалы, осы баяндамада қарастырылған Гинзбург-Ландау комплексті теңдеуі) эволюциялық теңдеулердің шешімдерінің ұзақ мерзімді әрекетін зерттеуде маңызды. Соңғы уақыттарда пайда болған аттракторлардың орташалануына байланысты бірнеше жұмыстарды атап өтеміз ([2], [3] және [4]).

Аттракторлар диссипативті сызықты емес эволюция теңдеулерінің шешімдерінің уақыт шексіздікке ұмтылғандағы әрекетін сипаттайды. Олар динамикалық жүйелердің ең маңызды