УДК 517.925.5

Б.Х.Жанбусинова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: bagdat.60@mail.ru)

Построение периодических решений линейных и квазилинейных дифференциально-разностных уравнений второго порядка

В статье рассмотрены условия существования и методы построения периодических решений линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с постоянным отклонением. Решение представлено в виде тригонометрического ряда Фурье. Для квалилинейных уравнений оно получено методом последовательных приближений. Результаты сформулированы в виде теорем.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, отклонение аргумента, метод неопределенных коэффициентов, ряд Фурье, мажорантная система, метод сравнения, уравнения с запаздывающим аргументом, порождающее решение, «укороченная система», ортогональная система, периодические коэффициенты, предельный переход.

Вопрос о периодических решениях уравнений и систем уравнений с отклонением имеет большое практическое значение не только в качественной теории дифференциальных уравнений, но и в прикладной математике. Последействие, например, в эволюционирующей системе сказывается в том, что ее состояние в любой момент времени влияет на характер эволюции этой системы не только в тот же момент времени, но и в последующие. Математически это означает, что в дифференциальных уравнениях, описывающих это явление, появляются члены с запаздыванием. Технологические и конструктивные усовершенствования требуют учета явлений последействия и в традиционных областях техники.

Разнообразие и сложность получаемых математических моделей — систем дифференциальных уравнений с запаздыванием являются причиной отсутствия общих методов разрешения таких систем. Вопрос о существовании периодических решений является важной ветвью при изучении любого класса уравнений, особое внимание ему уделяется и в дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом.

Исследование периодических решений линейных автономных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом проводится аналогично уравнениям без отклонений аргумента; однако число резонансных частот для уравнений может быть сколь угодно большим и даже бесконечным.

Наряду с данной работой вопросу существования и построения периодических решений линейных дифференциально-разностных уравнений первого и второго порядков посвящены и работы [1–3].

1. Рассмотрим линейное дифференциально-разностное уравнение

$$\ddot{x}(t) = a(t)x(t-\Delta) + b(t), \tag{1}$$

где $a(t), b(t)$ — периодические по t с периодом 2π функции; Δ — постоянная величина, характеризующая отклонение аргумента, причем $0 \le \Delta \le 2\pi$.

Периодические решения уравнения (1) будем искать в виде тригонометрического ряда Фурье

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_k \exp(ikt), \tag{2}$$

где x_k — неизвестные постоянные коэффициенты. Так как все функции периодические, достаточно ограничиться рассмотрением свойств для $t \in [-\pi, \pi]$.

Лемма. Если функция $\varphi(t)$ непрерывна на конечном отрезке $[a,b]$, то:

1) ее ряд Фурье

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k \exp(ikt) \tag{3}$$

сходится к $\varphi(t)$ в каждой точке $t \in [a,b]$;

2) для коэффициентов этого ряда справедливо следующее соотношение:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k^2 < +\infty.$$

Для построения периодического решения уравнения (1) воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Подставим (2) в (1), вместо $a(t)$ и $b(t)$ — их разложения в ряд Фурье вида (3):

$$-\sum_{-\infty}^{+\infty} x_k k^2 \exp(ikt) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k \exp(ikt) \sum_{-\infty}^{+\infty} x_k \exp(ikt)\exp(-ik\Delta) + \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k \exp(ikt). \tag{4}$$

Пусть ряд (2) абсолютно сходится. Учитывая абсолютную сходимость ряда Фурье для $a(t)$, выполним умножение рядов в (4). Так как система функций $\exp(ikt)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ ортогональна, то, приравнивая коэффициенты рядов при соответствующих k, получим бесконечную систему уравнений относительно неизвестных x_k :

$$-k^2 x_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{k-n} x_n \exp(-in\Delta) + b_k, \quad \left(k - 0, \pm 1, \pm 2, ...\right). \tag{5}$$

Из (5) получим

$$-(k^2 + a_0 \exp(-ik\Delta)) x_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{k-n} x_n \exp(-in\Delta) + b_k, \quad \left(n \neq k\right)$$

или

$$x_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{a_{kn}} x_n \exp(-in\Delta) + \bar{b}_k, \tag{6}$$

где $\bar{a}_{kk} = 0$, $\bar{a}_{kn} = \dfrac{a_{k-n}\exp(ik\Delta)}{-(k^2\exp(ik\Delta) + a_0)}$; $\bar{b}_k = \dfrac{b_k \exp(ik\Delta)}{-(k^2\exp(ik\Delta) + a_0)}$.

Пусть $k^2\exp(ik\Delta) + a_0 \neq 0$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Для исследования системы (6) применим метод сравнения [4]. Рассмотрим мажорантную систему

$$x_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{kn} X_n + B_k, \left(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...\right), \tag{7}$$

где

$$A_{kn} \geq \left|\bar{a}_{kn}\right|, \; B_k \geq \left|\bar{b}_k\right|. \tag{8}$$

Определение. Решения систем (6) и (7), найденные методом последовательных приближений при нулевых начальных значениях, называются главными. Обозначим главные решения x_k^* и X_k^*, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Причем, если $\bar{a}_{kn} \geq 0$, $\bar{b}_k \geq 0$, то $x_k^* \geq 0$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

Метод сравнения позволяет установить между решениями систем (6) и (7) следующие соотношения.

Теорема 1. Если мажорантная система (7) имеет неотрицательное решение $X_k^* \geq 0$, то система (6) имеет решение x_k^*, которое может быть найдено методом последовательных приближений и для которого имеет место неравенство

$$\left|x_k^*\right| \leq X_k^* \;\; (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...). \tag{9}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда единственное решение системы (6), удовлетворяющее неравенству $\left|x_k^*\right| \leq R X_k^*$ $(R \geq 1,\, R - const)$, есть ее главное решение, которое может быть получено при любых начальных значениях, удовлетворяющих неравенству

$$\left|x_k^{(0)}\right| \leq R X_k^* \;\; (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Согласно [5], система (7) имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} X_k^2 < +\infty,$$

если определитель системы (7) отличен от нуля и выполняются следующие условия:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left|A_{kk}\right| < +\infty; \tag{10}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{kn}^2 < +\infty; \tag{11}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} B_k^2 < +\infty. \tag{12}$$

Проверим выполнение условий (10) – (12) для системы (7).

Учитывая (8), для определенности возьмем

$$A_{kn} = \left|\overline{a}_{kn}\right|,\ B_k = \left|\overline{b}_k\right|,\ \ (k,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...). \tag{13}$$

Выполнение условия (10) очевидно. Проверим выполнение условия (11):

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{kn}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{a_{k-n}\exp(ik\Delta)}{-(k^2\exp(ik\Delta)+a_0)}\right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\exp(ik\Delta)\right|^2}{\left|k^2\exp(ik\Delta)+a_0\right|^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|a_{k-n}\right|^2 =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{C_k}{k^4 + a_0^2 + 2k^2 a_0\cos k\Delta} < +\infty,$$

где $C_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|a_{k-n}\right|^2 < +\infty \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...),$ в силу леммы.

Аналогично проверяется выполнение условия (12):

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{b_k\exp(ik\Delta)}{-(k^2\exp(ik\Delta)+a_0)}\right|^2 < +\infty.$$

Итак, система (7) имеет единственное решение $X_k\ \left(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...\right),$ которое, согласно (13), будет неотрицательным. Тогда система (6), в силу (9), также будет иметь единственное решение, удовлетворяющее неравенству

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\left|x_k\right|^2 < +\infty. \tag{14}$$

Из свойств функций $a(t), b(t)$ и леммы следует, что ряд Фурье (2) сходится к решению $x(t)$ системы (1) в каждой точке $t \in \left[-\pi, \pi\right]$. Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть дано дифференциально-разностное уравнение (1) с периодическими коэффициентами. Для ряда Фурье функции $a(t)$ выполняется условие $k^2\exp(ik\Delta) + a_0 \neq 0,\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$ Если определитель системы, полученной из системы (6) заменой коэффициентов при неизвестных их модулях, отличен от нуля, то существует единственное непрерывное периодическое решение уравнения (1), представимое в виде (2), для которого имеет место (14). Ряд (2) сходится в каждой точке $t \in \left[-\pi, \pi\right]$ к периодическому решению $x(t)$.

Приближенное решение системы (6) находится с помощью предельного перехода в решении «укороченной системы», т.е. конечной системы, получающейся из системы (6) путем отбрасывания всех членов, начиная с некоторого.

2. Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\ddot{y}(t) = a(t)y(t-\Delta) + b(t) + \mu f(t, y(t-\Delta)),$$

где $a(t), b(t)$ такие же, как в уравнении (1); Δ — постоянная величина, характеризующая отклонение аргумента, причем $0 \le \Delta \le 2\pi$; μ — малый параметр; $f(t, y(t-\Delta))$ — непрерывная, периодическая по t функция, представимая в виде полинома

$$f(t, y(t-\Delta)) = \sum_{i=1}^{n} F_i(t) y^i, \tag{15}$$

где $F_i(t)$ — непрерывные периодические по t коэффициенты. Рассмотрим случай $k^2\exp(ik\Delta) + a_0 \neq 0,\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$ В этом случае уравнение (15) при $\mu = 0$ имеет единственное периодическое решение $y_0(t),$ которое называется порождающим решением. Сделав в уравнении (15) замену $y = y_0 + x,$ с учетом того, что $y_0(t)$— периодическое решение этого уравнения, получим уравнение

$$\ddot{x} = a(t)x(t-\Delta) + \mu g(t, x(t-\Delta)), \tag{16}$$

где $g(t, x(t-\Delta))$ имеет ту же структуру, что и $f(t, y(t-\Delta),$ т.е.

$$g(t, x(t-\Delta)) = \sum_{i=1}^{n} G_i(t) x^i. \tag{17}$$

Для уравнения (16) порождающим решением будет $x_0 = 0$. Периодическое решение уравнения (16), обращающееся в порождающее при $\mu = 0$ будем искать методом последовательных приближений. За начальное решение возьмем $x_0 = 0$, тогда $x_1(t)$ является периодическим решением уравнения

$$\ddot{x}_1 = a(t)x_1(t-\Delta) + \mu\, g(t,0). \tag{18}$$

Второе приближение $x_2(t)$ будет периодическим решением уравнения

$$\ddot{x}_2 = a(t)x_2(t-\Delta) + \mu\, g(t,x_1).$$

Аналогично k -ое приближение будет периодическим решением уравнения

$$\ddot{x}_k = a(t)x_k(t-\Delta) + \mu\, g(t,x_{k-1}), \tag{19}$$

т.е. на каждом шаге мы получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение вида (1), периодическое решение которого можно построить по изложенной выше методике.

Сходимость метода последовательных приближений обеспечена при достаточно малых μ. Таким образом, справедлива

Теорема 4. Пусть $a(t)$, $g(t,x(t-\Delta))$ — непрерывные периодические по t функции, причем для $g(t,x(t-\Delta))$ справедливо представление (17). Для коэффициентов ряда Фурье функции $a(t)$ выполняется условие $k^2\exp(ik\Delta) + a_0 \neq 0$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Если определитель системы, аналогичной системе (6) для уравнений вида (18)–(19) заменой коэффициентов при неизвестных x_k модулями этих коэффициентов, отличен от нуля, то при достаточно малых μ существует единственное непрерывное периодическое решение уравнения (16), имеющее вид (2), для которого справедливо соотношение (14). Полученный ряд Фурье сходится к решению уравнения (16) в каждой точке $t \in [-\pi, \pi]$.

Список литературы

1 *Жанбусинова Б.Х.* О зависимости периодических решений от параметра // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2009. — № 3 (55). — С. 8–12.

2 *Жанбусинова Б.Х.* О периодических решениях одного класса дифференциально-разностных уравнений второго порядка // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2010. — № 2 (58). — С. 30–34.

3 *Жанбусинова Б.Х.* О периодических решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклонением аргумента // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2010. — № 2 (58). — С. 34–38.

4 *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 367 с.

5 *Рябов Ю.А., Толмачев И.Л.* Сб. научных работ аспирантов. — Вып. 1. — М.: Ун-т Дружбы народов, 1968. — С. 21–33.

Б.Х.Жанбусинова

Екінші ретті сызықтық және квазисызықтық дифференциалды-айырымдық теңдеулердің периодты шешімдерін құру

Мақалада тұрақты ауытқумен алынған сызықтық және квазисызықтық дифференциалды теңдеулердің периодты шешімдерінің бар болу шарттары және оларды құру әдістері қарастырылған. Шешімдер тригонометриялық Фурье қатары түрінде ізделінді. Квазисызықтық дифференциалды теңдеулер үшін шешімдер тізбектеп жуықтау әдісімен алынған. Нәтижелер теоремалар түрінде тұжырымдалды.

B.Kh.Zhanbusinova

Construction of periodic solutions of linear and quasi-linear differential-difference equations of the second order

In this article the existence conditions and methods of construction of periodic solutions of linear and quasi-linear differential equations with constant deviation are considered. The solution is sought in the form of a trigonometric Fourier series. For quasilinear equations it is obtained by the method of successive approximations. The results are stated in the form of theorems.

References

1 Zhanbusinova B.H. *On the dependence of periodic solutions to the parameter* // Bull. of KarSU. Ser. Mathematics, 2009, № 3 (55), p. 8–12.

2 Zhanbusinova B.H. *About periodic solutions of the class of the second order differential-difference equations* // Bull. of KarSU. Ser. Mathematics, 2010, №2 (58), p. 30–34.

3 Zhanbusinova B.H. *About periodic solutions of the first order differential equations with deviation of argument* // Bull. of KarSU. Ser. Mathematics, 2010, №2 (58), p. 34–38.

4 Malkin I.G. *Some problems in the theory of nonlinear oscillations*, M.: Gostekhizdat, 1956, p. 367.

5 Ryabov Yu.A. Tolmachev I.L. *Coll. of scientific Crabot aspirantovollected Works graduate issue 1. MA, University of Friendship of Peoples*, 1968, p. 21–23.

УДК 517.51

А.М.Жантакбаева

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (E-mail: ayagoz.zhantakbayeva@yandex.ru)

Неравенство Пэли для преобразования типа Харди коэффициентов кратных рядов Фурье

В статье рассмотрено неравенство типа Пэли (Харди-Литтлвуда-Стейна) для обобщенных средних типа Харди коэффициентов кратных тригонометрических рядов Фурье функций из анизотропного пространства Лоренца. С другой стороны, такого типа неравенства определяют необходимые условия принадлежности многопеременной функции к пространству $L_{\bar p \bar q}[0;1]^n$, что доказана нижняя оценка нормы функции в этом пространстве. Введено пространство $n_{\bar p,\bar q}(\lambda)$, исследованы интерполяционные и свойства вложения, которые позволяют получить основной результат данной работы.

Ключевые слова: неравенства Харди-Литтлвуда, неравенство Стейна, неравенства Пэли, кратные тригонометрические ряды Фурье, коэффициенты Фурье, анизотропные пространства Лоренца.

1 Введение. Пусть $1 \le \bar p < \infty,\ 0 < \bar q \le \infty,$ где $\bar p = (p_1,..,p_n),\ \bar q = (q_1,..,q_n).$ Множество всех измеримых по Лебегу 1-периодичных функций, определенных на $[0,1]^n,$ называется пространством Лоренца $L_{\bar p,\bar q}[0,1)^n,$ если конечны величины:

при $0 < \bar q < \infty$

$$\|f\|_{L_{\bar p \bar q}[0;1]^n} = \left(\int_0^1 \ldots \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1}} ... t_n^{\frac{1}{p_n}} f^{*_1 \ldots *_n}(t_1,...,t_n) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \ldots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{q_n}} < \infty;$$

при $\bar q = \bar\infty$

$$\|f\|_{L_{\bar p \bar\infty}[0;1]^n} = \sup_{\bar t = (t_1,...,t_n) \in [0;1]^n} t_1^{\frac{1}{p_1}} ... t_n^{\frac{1}{p_n}} f^{*_1 \ldots *_n}(t_1,...,t_n) < \infty.$$

Здесь $f^{*_1 \ldots *_n}(t_1,...,t_n)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(\bar t)|$ по любой переменной t_j при фиксированных остальных переменных [1].

Пусть функции f соответствует ряд Фурье $\sum_{k_n=1}^{\infty} \ldots \sum_{k_1=1}^{\infty} a_{k_1 \ldots k_n} e^{2\pi i (k_1 x_1 + \ldots + k_n x_n)}$ по тригонометрической системе, где коэффициенты

$$a_{k_1 \ldots k_n}(f) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1,...,x_n) e^{-2\pi i (k_1 x_1 + \ldots + k_n x_n)} dx_1 .. dx_n.$$