[4] Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green Function Representation in the Dirichlet Problem for Polyharmonic Equations in a Ball //Doklady Mathematics. 2008. V.78(1). P. 528–530.

[5] Koshanov B.D., Kuntuarova A.D. Equivalence of the Fredholm solvability condition for the Neumann problem to the complementarity condition //Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 2021. V. 111(3). P. 39–51.

[6] Karachik V.V. Construction of Polynomial Solutions to the Dirichlet Problem for the Polyharmonic Equation in a Ball //Comp. Math. and Math. Physics. 2014. V. 54. P. 1122–1143.

[7] Karachik V. Green's functions of some boundary value problems for the biharmonic equation //Complex Var. and Elliptic Eq. 2022. V. 67. P. 1712–1736.

[8] arachik V., Turmetov B., Yuan H. Four Boundary Value Problems for a Nonlocal Biharmonic Equation in the Unit Ball //Mathematics. 2022. 10. 1158.

[9] Karachik V.V., Torebek B.T. On the Dirichlet-Riquier problem for biharmonic equations //Math. Notes. 2017. V. 102. P. 31–42.

[10] Karachik V.V. Dirichlet and Neumann boundary value problems for the polyharmonic equation in the unit ball //Mathematics. 2021. 9. 1907.

[11] Karachik V.V. Green's Functions of the Navier and Riquier-Neumann Problems for the Biharmonic Equation in the Ball //Differential Eq. 2021. V. 57. P. 654–668.

[12] Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic //Complex Var. and Elliptic Eq. 2009. V. 54. P. 79–93.

[13] Karachik V. Riquier-Neumann Problem for the Polyharmonic Equation in a Ball //Mathematics. 2023; 11: 1000.

[14] Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для полигармонического уравнения //Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2(2). С. 41–52.

[15] Koshanov B.D. About solvability of boundary value problems for the nonhomogeneous polyharmonic equation in a ball //Journal Advances in Pure and Applied Math. 2013. V. 4(4). P. 351–373.

[16] Soldatov A.P. On the Fredholm property and index of the generalized Neumann problem //Differential eq. 2020. V. 56. P. 212–220.

[17] Koshanov B., Soldatov A. On Fredholm solvability and on the index of the generalized Neumann problem for an elliptic equation //Complex Var. and Elliptic Eq. 2022. V. 67(12). P. 2907–2923.

[18] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. -М.: Наука, 1974. -809 с.

ГУРСА ЕСЕПТЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ШЕШУ

Күзенбай Айгерім Жарылқасынқызы[1]

[1]Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, Қарағанды, Қазақстан
[1]E-mail: aigk3@mail.ru

Математикалық физикада ДТДТ физикалық құбылыстарды модельдеу үшін кеңінен қолданылады. ДТДТ-ге қойылатын есептердің ішінде Коши есебі, Дирихле есебі, Нейман есебі және Гурса есебі сияқты түрлері бар. Гурса есебі гиперболалық типтегі теңдеулер үшін қойылады және оның шешімі белгілі бір ерекшеліктерге ие[2].

Гурса есебінің қойылымы:

Екі тәуелсіз айнымалысы бар гиперболалық типтегі ДТДТ қарастырайық:

$$(x,y)\,u_{\{xx\}}+2B\,(x,y)\,u_{\{xy\}}+C\,(x,y)\,u_{\{yy\}}+D\,(x,y)\,u_x\;++E\,(x,y)\,u_y+F\,(x,y)\,u=G\,(x,y) \tag{1}$$

мұнда $u\,(x,y)$ – ізделінді функция, ал A,B,C,D,E,F,G – берілген функциялар. Гиперболалық тип үшін $B^2-AC>0$ шарты орындалуы керек.

Гурса есебі келесі шарттарды қанағаттандыратын $u\,(x,y)$ функциясын табудан тұрады: Теңдеуді қанағаттандыру:

$$A\,(x,y)\,u_{\{xx\}}+2B\,(x,y)\,u_{\{xy\}}+C\,(x,y)\,u_{\{yy\}}+D\,(x,y)\,u_x+E\,(x,y)\,u_y+\;F\,(x,y)\,u=G\,(x,y)\,. \tag{2}$$

Екі қисық бойындағы шарттар:

$$u\,(x,y)=\varphi\,(x)\,,\;(x,y)\in\Gamma_1 \tag{3}$$

$$u\,(x,y)=\psi\,(y)\,,\;(x,y)\in\Gamma_2 \tag{4}$$

мұнда және – берілген қисықтар, ал $\varphi\,(x)$ және $\psi\,(y)$ – берілген функциялар.

Гурса есептерін шешу әдістері: Гурса есептерін шешу үшін әртүрлі әдістер қолданылады, соның ішінде:

1. **Интегралдық теңдеулер әдісі:** Бұл әдіс Гурса есебін интегралдық теңдеуге келтіруге негізделген. Содан кейін интегралдық теңдеуді шешу арқылы $u\,(x,y)$ функциясы табылады.
2. **Риман әдісі:** Риман әдісі гиперболалық типтегі теңдеулерді шешу үшін арнайы Риман функциясын қолданады. Бұл әдіс арқылы Гурса есебінің шешімін аналитикалық түрде табуға болады.
3. **Сандық әдістер:** Егер аналитикалық шешім табу мүмкін болмаса, сандық әдістер (мысалы, ақырлы айырымдар әдісі) қолданылады [4].

Гурса есептерінің қолданылуы:

Гурса есептерінің қолданылу аясы өте кең:

1. Газ динамикасы: Дыбыс жылдамдығынан жылдам қозғалатын денелердің айналасындағы газдың қозғалысын модельдеу.
2. Электродинамика: Электромагниттік толқындардың таралуын сипаттау.
3. Серпімділік теориясы: Қатты денелердегі кернеулерді және деформацияларды зерттеу.

Нақты мысалдар:

Мысал 1: Толқын теңдеуі: Толқын теңдеуі қарастырайық:

$$u_{\{tt\}}-c^2u_{\{xx\}}=0, \tag{5}$$

мұнда $u\,(x,t)$– толқынның амплитудасы, c – толқынның таралу жылдамдығы. Гурса есебі келесі шарттармен беріледі:

$$u\,(x,0)=\varphi\,(x) \tag{6}$$

$$u\,(0,t)=\psi\,(t)\,, \tag{7}$$

мұнда $\varphi\left(x\right)$ және $\psi\left(t\right)$ – берілген функциялар. Шешімі: Д'Аламбер формуласын қолдану арқылы шешімді табуға болады:

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+ct\right)+\varphi\left(x-ct\right)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi\left(r\right)d\tau \qquad (8)$$

Мысал 2: Транссоникалық ағын

Транссоникалық ағынды сипаттайтын теңдеу (Чаплыгин теңдеуі):

$$u_{\{\theta\theta\}}+m\left(\theta\right)u_{\{rr\}}=0, \qquad (9)$$

мұнда $u\left(r,\theta\right)$ – ағынның жылдамдық потенциалы, $m\left(\theta\right)$ – ағынның жылдамдығына тәуелді функция. Гурса есебі келесі шарттармен беріледі:

$$u\left(r,0\right)=\varphi\left(r\right), \qquad (10)$$

$$u\left(0,\theta\right)=\psi\left(\theta\right), \qquad (11)$$

мұнда $\varphi\left(r\right)$ және $\psi\left(\theta\right)$ – берілген функциялар.

Шешімі: Бұл есепті шешу үшін Риман әдісін немесе сандық әдістерді қолдануға болады, себебі Чаплыгин теңдеуінің аналитикалық шешімі әрқашан табыла бермейді.

Жаңалықтар мен соңғы зерттеулер:

Соңғы жылдары Гурса есептерінің теориясы мен қолданылуы бойынша бірнеше жаңа бағыттар пайда болды. Солардың кейбірін қарастырайық:

1. **Фракталды ДТДТ үшін Гурса есептері:**
   - Фракталды ДТДТ табиғаттағы күрделі құбылыстарды, мысалы, кеуекті орталардағы сұйықтықтың ағуын немесе турбуленттілікті модельдеу үшін қолданылады.
   - Фракталды туындыларды қолдану арқылы Гурса есептерінің жалпыламаларын құруға болады[1].
   - Мысал: Фракталды толқын теңдеуі:
   - $D_t^{\alpha}u-c^2D_x^{\beta}u=0$, мұнда D_t^{α} D_x^{β} – фракталды туындылар. Бұл теңдеуге Гурса типтегі шарттар қою арқылы фракталды ортадағы толқындарды зерттеуге болады.
2. **Кері есептер үшін Гурса шарттары:**
   - Кері есептерде ДТДТ-нің коэффициенттерін немесе шекаралық шарттарын белгілі бір өлшеулер арқылы анықтау керек [2].
   - Гурса шарттарын кері есептер үшін қосымша ақпарат ретінде қолдануға болады.
   - Мысал: Толқын теңдеуі үшін кері есеп:
   - $u_{\{tt\}}-c^2\left(x\right)u_{\{xx\}}=0$ мұнда $c\left(x\right)$ – белгісіз функция. Гурса шарттары $u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right)$ және $u\left(0,t\right)=\psi\left(t\right)$ берілген болса, $c\left(x\right)$-ті анықтауға болады.
   - Шешу әдістері: Кері есептерді шешу үшін итерациялық әдістер, регуляризация әдістері және оптималды басқару теориясы қолданылады.
3. **Жасанды интеллект және машиналық оқыту әдістері:**
   - Соңғы жылдары ДТДТ шешімдерін табу үшін машиналық оқыту әдістері кеңінен қолданылуда.

- Нейрондық желілерді қолдану арқылы Гурса есептерінің шешімдерін жуықтауға болады.
- Мысал: Физикамен байланысты нейрондық желілер (Physics-Informed Neural Networks, PINNs) ДТДТ-нің шешімін табу үшін теңдеудің өзін және шекаралық шарттарды ескереді. PINNs-ті Гурса есептерін шешу үшін де қолдануға болады[3].

4. **Сандық әдістерді жетілдіру:**
   - Гурса есептерін сандық түрде шешу үшін ақырлы элементтер әдісі, ақылы көлемдер әдісі және спектрлік әдістер қолданылады.
   - Соңғы зерттеулер сандық әдістердің дәлдігін және тиімділігін арттыруға бағытталған.
   - Мысал: Адаптивті торларды қолдану арқылы шешімнің ерекшеліктері бар аймақтарда есептеу дәлдігін арттыруға болады.

Қорытынды:

Гурса есептері математикалық физикада маңызды рөл атқарады және гиперболалық типтегі ДТДТ-ге қойылатын есептердің бірі болып табылады. Жаңа зерттеулер фракталды ДТДТ, кері есептер және машиналық оқыту сияқты бағыттарда Гурса есептерінің қолданылу аясын кеңейтуде. Бұл жаңалықтар Гурса есептерінің физикалық құбылыстарды модельдеудегі рөлін одан әрі арттырады.

Әдебиеттер тізімі

[1] Atangana, A. (2016). Fractal-fractional operators for groundwater flow modeling. Advances in Water Resources, 91, 1-7.

[2] Kirane, M., Malik, S. A., Tatar, N. E. (2014). Determination of an unknown source term in a hyperbolic equation with Goursat data. Applied Mathematics and Computation, 232, 641-651.

[3] Raissi, M., Perdikaris, P., Karniadakis, G. E. (2019). Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. Journal of Computational Physics, 378, 686-707.

[4] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zhu, J. Z. (2013). The finite element method: its basis and fundamentals. Butterworth-Heinemann.

ОБ РАЗРЕШИМОСТИ СЕМЕЙСТВА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Мерзетхан А.[1], **Оспанов М.Н.**[2]

[1,2] ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

[1] E-mail: akerkemerzetkhan@gmail.com

[2] E-mail: ospanov_mn@enu.kz

Пусть $\varphi(x) > 0$ — монотонная и ограниченная функция на интервале $x \in [0, \omega]$. В