

УДК 517.518.476

ОБ УСЛОВИЯХ АБСОЛЮТНОЙ ЧЕЗАРОВСКОЙ СУММИРУЕМОСТИ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

С. Битимхан

Получено необходимое и достаточное условие абсолютной $|C; \bar{\beta}|_\lambda$ -суммируемости почти всюду на \mathbb{T}^s кратных тригонометрических рядов Фурье функций $f \in L_{\bar{q}}(\mathbb{T}^s)$, принадлежащих к обобщенным классам Бесова $B_{\bar{q},s,\theta}^{\omega_r}$, где $\mathbb{T}^s = [0, 2\pi)^s$, $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$, $\bar{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s)$, $1 < q_j \leq 2$, $j = \overline{1, s}$, $1 \leq \lambda \leq q_s \leq \dots \leq q_1$, $\lambda < \theta < \infty$, $0 \leq \beta_j < 1/q'_j = 1 - 1/q_j$, $j = \overline{1, s}$, $r \in \mathbb{N}$, $r > \sum_{j=1}^s (1/q_j - \beta_j)$, ω_r — функция типа модуля гладкости порядка r .

Ключевые слова: кратные тригонометрические ряды Фурье, абсолютная суммируемость, модуль гладкости, обобщенный класс Бесова.

S. Bitimkhan. Conditions of absolute Cesaro summability of multiple trigonometric Fourier series.

A necessary and sufficient condition of absolute $|C; \bar{\beta}|_\lambda$ -summability almost everywhere on \mathbb{T}^s is obtained for multiple trigonometric Fourier series of functions $f \in L_{\bar{q}}(\mathbb{T}^s)$ from generalized Besov classes $B_{\bar{q},s,\theta}^{\omega_r}$, where $\mathbb{T}^s = [0, 2\pi)^s$, $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$, $\bar{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s)$, $1 < q_j \leq 2$, $j = \overline{1, s}$, $1 \leq \lambda \leq q_s \leq \dots \leq q_1$, $\lambda < \theta < \infty$, $0 \leq \beta_j < 1/q'_j = 1 - 1/q_j$, $j = \overline{1, s}$, $r \in \mathbb{N}$, $r > \sum_{j=1}^s (1/q_j - \beta_j)$, and ω_r is a function of the type of modulus of smoothness of order r .

Keywords: multiple trigonometric Fourier series, absolute summability, modulus of smoothness, generalized Besov class.

MSC: 42A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-42-47

Пусть \mathbb{R}^s — s -мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_s)$, $s \in \mathbb{N}$;

$\mathbb{T}^s = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^s : 0 \leq x_j < 2\pi, j = \overline{1, s}\}$; $L_{\bar{q}}(\mathbb{T}^s)$ — пространство всех измеримых 2π -периодических по каждой переменной x_j , $j = \overline{1, s}$, функций $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_s)$, для которых

$$\|f\|_{\bar{q},s} = \left(\int_0^{2\pi} \left[\dots \left[\int_0^{2\pi} |f(\bar{x})|^{q_1} dx_1 \right]^{q_2/q_1} \dots \right]^{q_s/q_{s-1}} dx_s \right)^{1/q_s} < \infty,$$

где $\bar{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s)$, $1 \leq q_j < \infty$, $j = \overline{1, s}$ (в случае $q_1 = q_2 = \dots = q_s = q$ полагаем $\|f\|_{\bar{q},s} \equiv \|f\|_{q,s}$);

$E_{n,\infty}^{(j)}(f)_{\bar{q},s}$ — частное наилучшее приближение функции $f(\bar{x}) \in L_{\bar{q}}(\mathbb{T}^s)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n \in \mathbb{Z}_+$ по переменной x_j , $j = \overline{1, s}$ (см., например, [1, гл. II, п. 2.2]);

$\omega_r^{(j)}(f; \delta)_{\bar{q},s}$ — частный модуль гладкости функции $f \in L_{\bar{q}}(\mathbb{T}^s)$ порядка $r \in \mathbb{N}$ по переменной x_j , $j = \overline{1, s}$ (см., например, [1, гл. III, пп. 3.4.34, 3.12.5]):

$$\omega_r^{(j)}(f; \delta)_{\bar{q},s} = \sup\{\|\Delta_{h,x_j}^r f(\cdot)\|_{\bar{q},s} : h \in \mathbb{R}^1, |h| \leq \delta\}, \quad \delta \in [0, +\infty),$$

где

$$\Delta_{h,x_j}^r f(\bar{x}) = \sum_{\nu=0}^r (-1)^{r-\nu} \binom{r}{\nu} f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_s), \quad \binom{r}{\nu} = \frac{r!}{\nu!(r-\nu)!}, \quad \nu = \overline{0, r}.$$

Положим $\gamma_i(nx) = \{\cos nx, i = 1; \sin nx, i = 2\}$, где $x \in \mathbb{R}^1, n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим кратный тригонометрический ряд

$$\sum_{\bar{n} \geq \bar{1}} B_{\bar{n}}(\bar{x}) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \dots \sum_{n_s=1}^{\infty} B_{n_1, \dots, n_s}(x_1, \dots, x_s), \quad (1)$$

где

$$B_{\bar{n}}(\bar{x}) = \sum_{\bar{1} \leq \bar{i} \leq \bar{2}} a_{\bar{n}}^{(\bar{i})} \prod_{\nu=1}^s \gamma_{i_\nu}(n_\nu x_\nu), \quad a_{\bar{n}}^{(\bar{i})} \in \mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}.$$

Для заданных $n \in \mathbb{N}$ и $\beta \in (-1, +\infty)$ положим $A_n^{(\beta)} = (\beta + 1)(\beta + 2) \dots (\beta + n)/n!$. Сумма

$$\sigma_{\bar{n}}^{(\bar{\beta})}(\bar{x}) = \sum_{\bar{1} \leq \bar{k} \leq \bar{n}} \prod_{j=1}^s A_{n_j - k_j}^{(\beta_j - 1)} \left(A_{n_j}^{(\beta_j)} \right)^{-1} B_{\bar{k}}(\bar{x}), \quad \bar{n} = (n_1, \dots, n_s),$$

называется $(C; \bar{\beta}) \equiv (C; \beta_1, \dots, \beta_s)$ *средним (или средним по Чезаро) ряда (1)*.

Для чисел $b_{\bar{n}}$ определим смешанную разность $\Delta b_{\bar{n}}$ следующим образом:

$$\Delta b_{\bar{n}} = \sum_{\eta_1=0}^1 \dots \sum_{\eta_s=0}^1 (-1)^{s-|\bar{\eta}|} b_{(n_1-1+\eta_1, \dots, n_s-1+\eta_s)} = \sum_{\bar{0} \leq \bar{\eta} \leq \bar{1}} (-1)^{s-|\bar{\eta}|} b_{\bar{n}-\bar{1}+\bar{\eta}}$$

($\bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_s), \eta_i \in \{0, 1\}, i = \bar{1}, s; |\bar{\eta}| = \eta_1 + \dots + \eta_s$).

Для заданного числа $\lambda \geq 1$ ряд (1) называется $|C; \bar{\beta}|_\lambda$ -суммируемым (или абсолютно суммируемым по Чезаро) в точке $\bar{x} \in \mathbb{T}^s$, если

$$\sum_{\bar{n} \geq \bar{1}} \left| \Delta \sigma_{\bar{n}}^{(\bar{\beta})}(\bar{x}) \right|^\lambda \prod_{j=1}^s n_j^{\lambda-1} < \infty.$$

(см., например, [2–4] – случай $\lambda = 1$; [5] – случай $s = 1, \lambda \geq 1$).

Исследованию условий $|C; \bar{\beta}|_\lambda$ -суммируемости при $\lambda = 1$ кратных тригонометрических рядов Фурье функций $f \in L_2(\mathbb{T}^s)$ в терминах поведения величин $E_{n, \infty}^{(j)}(f)_{2, s}$ и $\omega_r^{(j)}(f; 1/n)_{2, s}$ ($j = \bar{1}, s$) посвящены работы [3; 4; 6] (см. в них также библиографию, где приведены ссылки на более ранние работы, связанные с рассматриваемой тематикой). В случае $s = 1$ и $\lambda \geq 1$ наиболее разностороннее исследование вопроса $|C; \alpha|_\lambda$ -суммируемости ($\alpha > -1$) рядов Фурье функций $f \in L_q(T)$ ($1 < q \leq 2$) с детальным обзором ранее известных результатов было проведено И. Салаи в [5].

Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие обозначения:

$$E_{\bar{q}, s}^\varepsilon = \{f \in L_{\bar{q}}(\mathbb{T}^s) : E_{n, \infty}^{(j)}(f)_{\bar{q}, s} = O(\varepsilon_n), n \in \mathbb{N}, j = 1, 2, \dots, s\},$$

где $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ – заданная последовательность положительных чисел, монотонно убывающая к 0 при $n \rightarrow \infty$;

$$H_{\bar{q}, s}^{\omega_r} = \{f \in L_{\bar{q}}(T^s) : \omega_r^{(j)}(f; \delta)_{\bar{q}, s} = O(\omega_r(\delta)), \delta \in (0, 1], j = 1, \dots, s\},$$

где $\omega_r(\delta)$ – функция типа модуля гладкости порядка $r \in \mathbb{N} : \omega_r(\delta) \rightarrow 0 = \omega_r(0)$ при $\delta \rightarrow 0$, $\omega_r(\delta)$ непрерывна и не убывает на отрезке $[0, 1]$, для некоторого постоянного $C(r) > 0$ и всех $0 < \delta_1 < \delta_2 \leq 1$ выполняется неравенство $\delta_2^{-r} \omega_r(\delta_2) \leq C(r) \delta_1^{-r} \omega_r(\delta_1)$.

Кроме того, нам понадобится также определение обобщенного класса О.В. Бесова $B_{\bar{q}, s, \theta}^{\omega_r}$ (см., например, [7, разд. 1°]):

$$B_{\bar{q}, s, \theta}^{\omega_r} = \left\{ f \in L_{\bar{q}}(\mathbb{T}^s) : \left(\int_0^1 \left(\frac{\omega_r^{(j)}(f; t)_{\bar{q}, s}}{\omega_r(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} < \infty, j = 1, 2, \dots, s \right\},$$

где $1 \leq \theta \leq \infty$. В случае $\theta = \infty$ класс $B_{q,s,\infty}^{\omega_r} = H_{q,s}^{\omega_r}$. Если $q_1 = q_2 = \dots = q_s = q$, то вместо $E_{q,s}^\varepsilon$ и $H_{q,s}^{\omega_r}$ будем писать соответственно $E_{q,s}^\varepsilon$ и $H_{q,s}^{\omega_r}$.

При наличии ограничений на параметры $1 < q \leq 2$, $1 \leq \lambda \leq q$, $0 \leq \beta_j < 1/q' = 1 - 1/q$, $j = \overline{1, s}$, $r > s/q - \sum_{j=1}^s \beta_j$ в работе [8, теоремы 2 и 3] найдены необходимые и достаточные условия на последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ (на функцию $\omega_r(\delta)$) для $|C; \overline{\beta}|_\lambda$ -суммируемости почти всюду на \mathbb{T}^s ряда Фурье каждой функции $f \in E_{q,s}^\varepsilon$ (соответственно $f \in H_{q,s}^{\omega_r}$).

Утверждения теорем 2 и 3 из [8] позднее были обобщены на случай классов функций со смешанной нормой $E_{q,s}^\varepsilon$ и $H_{q,s}^{\omega_r}$ в работе [9, теорема 3 и теорема 4]. В дальнейшем $C_j(r, s, \dots)$, где $j \in \mathbb{N}$, обозначают положительные числа, значения которых зависят только от указанных в скобках параметров; в случае, когда понятно, от каких параметров зависят упомянутые числа, используется обозначение C_j .

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. Пусть $1 < q_j \leq 2$, $j = \overline{1, s}$, $1 \leq \lambda \leq q_s \leq \dots \leq q_1$, $\lambda < \theta < \infty$, $0 \leq \beta_j < 1/q'_j = 1 - 1/q_j$, $j = \overline{1, s}$, $r > \varkappa \equiv \sum_{j=1}^s (1/q_j - \beta_j)$. Тогда для $|C; \overline{\beta}|_\lambda$ -суммируемости почти всюду на \mathbb{T}^s ряда Фурье каждой функции $f \in B_{q,s,\theta}^{\omega_r}$ необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_0^1 \omega_r^{\frac{\lambda\theta}{\theta-\lambda}}(t) \cdot t^{-\left(\frac{\lambda\theta}{\theta-\lambda}\varkappa+1\right)} dt < \infty. \quad (2)$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $f \in B_{q,s,\theta}^{\omega_r}$ и выполняется (2). В силу неравенства (см., например, [1, гл. V, п. 5.3.1, неравенство (1)])

$$E_{n,\infty}^{(j)}(f)_{q,s} \leq C_1(r, s) \omega_r^{(j)}(f; 1/n)_{q,s}, \quad f \in L_{\overline{q}}(\mathbb{T}^s), \quad 1 \leq q_j < \infty, \quad j = \overline{1, s},$$

имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda\varkappa-1} \left(E_{n,\infty}^{(j)}(f)_{q,s} \right)^\lambda \asymp \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\lambda\varkappa} \left(E_{2^k, \infty}^{(j)}(f)_{q,s} \right)^\lambda \\ & \leq C_1^\lambda(r, s) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\lambda\varkappa} \left(\omega_r^{(j)}(f; 2^{-k})_{q,s} \right)^\lambda = C_1^\lambda(r, s) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\lambda\varkappa} \omega_r^\lambda(2^{-k}) \left(\frac{\omega_r^{(j)}(f; 2^{-k})_{q,s}}{\omega_r(2^{-k})} \right)^\lambda. \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda < \theta$, то, применяя неравенство Гельдера с показателями $\tau = \theta/\lambda > 1$, $\tau' = \theta/(\theta - \lambda)$ ($1/\tau + 1/\tau' = 1$), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda\varkappa-1} \left(E_{n,\infty}^{(j)}(f)_{q,s} \right)^\lambda \\ & \leq C_2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k\lambda\varkappa} \omega_r^\lambda(2^{-k}) \right)^{\tau'} \right]^{1/\tau'} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\omega_r^{(j)}(f; 2^{-k})_{q,s}}{\omega_r(2^{-k})} \right)^{\lambda\tau} \right]^{1/\tau} \\ & = C_2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k\lambda\theta}{\theta-\lambda}\varkappa} \omega_r^{\frac{\lambda\theta}{\theta-\lambda}}(2^{-k}) \right]^{(\theta-\lambda)/\theta} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\omega_r^{(j)}(f; 2^{-k})_{q,s}}{\omega_r(2^{-k})} \right)^\theta \right]^{\lambda/\theta} \\ & \leq C_3 \left[\int_0^1 \omega_r^{\frac{\lambda\theta}{\theta-\lambda}}(t) \cdot t^{-\left(\frac{\lambda\theta}{\theta-\lambda}\varkappa+1\right)} dt \right]^{(\theta-\lambda)/\theta} \left[\int_0^1 \left(\frac{\omega_r^{(j)}(f; t)_{q,s}}{\omega_r(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right]^{\lambda/\theta}. \end{aligned}$$

Из полученной оценки следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda\varkappa-1} \left(E_{n,\infty}^{(j)}(f)_{q,s} \right)^\lambda < \infty, \quad j = \overline{1, s},$$

откуда в силу теоремы 2 из [9] ряд Фурье функции $f \in B_{\bar{q},s,\theta}^{\omega_r}$ является $|C; \bar{\beta}|_\lambda$ -суммируемым почти всюду на \mathbb{T}^s .

Необходимость. Допустим, что ряд Фурье каждой функции $f \in B_{\bar{q},s,\theta}^{\omega_r}$ является $|C; \bar{\beta}|_\lambda$ -суммируемым почти всюду на \mathbb{T}^s , однако условие (2) не выполняется. Покажем, что в этом случае найдется функция $g_0(\bar{x}) \in B_{\bar{q},s,\theta}^{\omega_r}$, ряд Фурье которой не будет $|C; \bar{\beta}|_\lambda$ -суммируемым почти всюду на \mathbb{T}^s .

Построение функции $g_0(\bar{x})$ проведем, следуя схеме, приведенной в статье [7, разд. 3°, доказательство необходимости теоремы, п. 1]. Вначале отметим, что расходимость интеграла (2) равносильна расходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k\lambda\theta}{\theta-\lambda}\alpha} \omega_r^{\frac{\lambda\theta}{\theta-\lambda}} (2^{-k}) = +\infty. \quad (3)$$

В обозначениях $d_k = 2^{k\alpha} \omega_r(2^{-k})$, $p = \lambda\theta/(\theta - \lambda)$ условие (3) примет вид $\sum_{k=0}^{\infty} d_k^p = +\infty$. Тогда найдется числовая последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($0 < \varepsilon_k \downarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$), удовлетворяющая условиям (см. [7, разд. 3°, п. 1, свойства (22)]):

$$1) \varepsilon_k d_k^{p/\lambda} \leq 1, \quad 2) \sum_{k=0}^{\infty} d_k^p \varepsilon_k^\theta < \infty, \quad 3) \sum_{k=0}^{\infty} d_k^p \varepsilon_k^\lambda = \infty. \quad (4)$$

Положим (равенство понимается в смысле сходимости в метрике $L_{\bar{q}}(\mathbb{T}^s)$)

$$g_0(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{p/\lambda} \varepsilon_k 2^{-k\mu} \prod_{j=1}^s \sum_{n_j=2^{k+1}}^{2^{k+1}} \cos n_j x_j, \quad \mu = \sum_{j=1}^s (1 - \beta_j). \quad (5)$$

В силу известной оценки нормы одномерного ядра Дирихле (см., например, [10, § 4, доказательство теоремы 5 в части “необходимость”, неравенство (4.17) и неравенство после формулы (4.22)]) имеем

$$\left\| \prod_{j=1}^s \sum_{n_j=2^{k+1}}^{2^{k+1}} \cos n_j x_j \right\|_{\bar{q},s} = \prod_{j=1}^s \left\| \sum_{n_j=2^{k+1}}^{2^{k+1}} \cos n_j x_j \right\|_{q_j,1} \leq C_4(\bar{q}, s) 2^{k \sum_{j=1}^s (1-1/q_j)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (6)$$

откуда, учитывая также условие 1) в (4) и условие $\beta_j < 1/q'_j$, $j = \overline{1, s}$, получим

$$\begin{aligned} \|g_0\|_{\bar{q},s} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{p/\lambda} \varepsilon_k 2^{-k\mu} \left\| \prod_{j=1}^s \sum_{n_j=2^{k+1}}^{2^{k+1}} \cos n_j x_j \right\|_{\bar{q},s} \leq C_4 \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{p/\lambda} \varepsilon_k 2^{-k \sum_{j=1}^s (1-\beta_j)} 2^{k \sum_{j=1}^s (1-1/q_j)} \\ &= C_4 \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{p/\lambda} \varepsilon_k 2^{-k\alpha} \leq C_4 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

Из данной оценки следует, что ряд (5) действительно сходится в метрике $L_{\bar{q}}(\mathbb{T}^s)$ к некоторой функции $g_0 \in L_{\bar{q}}(\mathbb{T}^s)$.

Покажем теперь, что $g_0 \in B_{\bar{q},s,\theta}^{\omega_r}$. Положим

$$\delta_k(g_0; \bar{x}) = \sum_{2^{k+1} \leq \bar{n} \leq 2^{k+1}} B_{\bar{n}}(g_0, \bar{x}).$$

Воспользуемся утверждением (см. в [7, разд. 2°, п. 1, с. 328]), согласно которому $g_0 \in B_{\bar{q},s,\theta}^{\omega_r}$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=0}^{\infty} (\omega_r^{-1}(2^{-k}) \|\delta_k(g_0; \cdot)\|_{\bar{q},s})^\theta < \infty$. Учитывая оценку (6), определение d_k и условие 2) в (4), имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\omega_r^{-1}(2^{-k}) \|\delta_k(g_0; \cdot)\|_{\bar{q},s})^\theta = \sum_{k=0}^{\infty} (\omega_r^{-1}(2^{-k}) d_k^{p/\lambda} \varepsilon_k 2^{-k\mu})^\theta \left\| \prod_{j=1}^s \sum_{n_j=2^{k+1}}^{2^{k+1}} \cos n_j x_j \right\|_{\bar{q},s}^\theta$$

$$\begin{aligned} &\leq C_4^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\omega_r^{-1} (2^{-k}) d_k^{p/\lambda} \varepsilon_k 2^{-k\alpha} \right)^\theta = C_4^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(d_k^{p/\lambda-1} \varepsilon_k \right)^\theta \\ &= C_4^\theta \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{\theta\lambda/(\theta-\lambda)} \varepsilon_k^\theta = C_4^\theta \sum_{k=0}^{\infty} d_k^p \varepsilon_k^\theta < \infty, \end{aligned}$$

откуда следует, что $g_0 \in B_{q,s,\theta}^{\omega_r}$.

По предположению ряд Фурье функции $g_0 \in B_{q,s,\theta}^{\omega_r}$ является $|C; \bar{\beta}|_\lambda$ -суммируемым почти всюду на \mathbb{T}^s . Следовательно, согласно теореме 2 из [11] ряд

$$\sum_{\bar{n} \geq \bar{1}} |a_{\bar{n}}(g_0)|^\lambda \prod_{j=1}^s n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} < \infty. \quad (7)$$

Отметим, что утверждение теоремы 2 из [11] является распространением на многомерный случай для косинус-рядов соответствующего одномерного результата И. Салаи [5, разд. 1, п. (i) теоремы 1].

Далее, согласно определению функции g_0 , а также учитывая условие 3) в (4), получим

$$\begin{aligned} &\sum_{\bar{n} \geq \bar{1}} |a_{\bar{n}}(g_0)|^\lambda \prod_{j=1}^s n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^s \sum_{n_j=2^{k+1}}^{2^{k+1}} |a_{\bar{n}}(g_0)|^\lambda \prod_{j=1}^s n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(d_k^{p/\lambda} \varepsilon_k 2^{-k\mu} \right)^\lambda \prod_{j=1}^s \sum_{n_j=2^{k+1}}^{2^{k+1}} n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^p \varepsilon_k^\lambda 2^{-k\lambda\mu} \prod_{j=1}^s \sum_{n_j=2^{k+1}}^{2^{k+1}} n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} \\ &\geq C_5 \sum_{k=0}^{\infty} d_k^p \varepsilon_k^\lambda 2^{-k\lambda\mu} \prod_{j=1}^s 2^{k(\lambda(1-\beta_j)-1)} 2^k = C_5 \sum_{k=0}^{\infty} d_k^p \varepsilon_k^\lambda 2^{-k\lambda\mu} 2^{k\lambda\mu} = C_5 \sum_{k=0}^{\infty} d_k^p \varepsilon_k^\lambda = +\infty, \end{aligned}$$

что противоречит сходимости ряда (7). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. Москва: Физматгиз, 1960. 624 с.
2. **Тиман М.Ф.** Об абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье // Сообщения АН Грузинской ССР. 1961. Т. 26, № 6. С. 641–646.
3. **Пономаренко Ю.А.** Некоторые критерии абсолютной чезаровской суммируемости кратных рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1963. Т. 152, № 6. С. 1305–1307.
4. **Пономаренко Ю.А., Тиман М.Ф.** Об абсолютной суммируемости кратных рядов Фурье // Укр. мат. журн. 1971. Т. 23, № 3. С. 346–361.
5. **Салаи И.** Об абсолютной суммируемости тригонометрических рядов // Мат. заметки. 1981. Т. 30, № 6. С. 823–837.
6. **Тиман М.Ф., Пономаренко Ю.А.** Некоторые критерии абсолютной суммируемости рядов Фурье // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций: сб. тр. Баку: Изд-во АН Азерб. ССР, 1965. С. 489–492.
7. **Гольдман М.Л.** О вложении обобщенных гельдеровых классов // Мат. заметки. 1972. Т. 12, № 3. С. 325–336.
8. **Акишев Г.А., Битимханулы С.** Модули гладкости и абсолютная суммируемость кратных тригонометрических рядов // Мат. журн. Алматы. 2003. Т. 3, №1 (7). С. 5–14.
9. **Bitimkhan S., Akishev G.** The conditions of absolute summability of multiple trigonometric series // AIP Conf. Proc. 2015. Vol. 1676, no. 1, 020095. doi: 10.1063/1.4930521.
10. **Ульянов П.Л.** Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. 1967. Т. 72 (114), № 2. С. 193–225.

11. Битимханулы С. Условие абсолютной суммируемости кратных тригонометрических рядов // Вестн. КазГУ. Сер.: математика, механика, информатика. 2001. № 1 (24). С. 3–11.

Поступила 31.08.2018

После доработки 27.03.2019

Принята к публикации 29.04.2019

Битимхан Самат

канд. физ.-мат. наук,

Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова,

г. Караганды, Казахстан

e-mail: bsamat10@mail.ru

REFERENCES

1. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of real variables*. Macmillan, Pergamon Press, 1963. 631 p. Original Russian text published in Timan A.F. *Teoriya priblizheniya funktsij dejstvitel'nogo peremennogo*. Moscow: Fizmatgiz Publ., 1960, 624 p.
2. Timan M.F. Absolute convergence and summability of Fourier series. *Sobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR*, 1961, vol. 26, no. 6, pp. 641–646 (in Russian).
3. Ponomarenko Yu.A. Criteria for absolute Cesaro summability of multiple Fourier series. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1963, vol. 152, no. 6, pp. 1305–1307 (in Russian).
4. Ponomarenko Yu.A., Timan M.F. On the absolute summability of Fourier multiple series. *Ukr. Math. J.*, 1971, vol. 23, no. 3, pp. 291–304. doi: 10.1007/BF01085351.
5. Szalay I. Absolute summability of trigonometric series. *Math. Notes*, 1981, vol. 30, no. 6, pp. 912–919. doi: 10.1007/BF01145770.
6. Timan M.F., Ponomarenko Yu.A. Some criteria of absolute summability of Fourier series. In: *Issled. Sovrem. Probl. Konstr. Teor. Funkts.*, sbornik trudov, Baku: AN Azerb. SSR, 1965, pp. 489–492 (in Russian).
7. Gol'dman M.L. On the inclusion of generalized Hölder classes. *Math. Notes*, 1972, vol. 12, no. 3, pp. 626–631. doi: 10.1007/BF01093999.
8. Akishev G.A., Bitimkhanuly S. Moduli of smoothness and the absolute summability of multiple trigonometric series. *Mat. Zh. Almaty*, 2003, vol. 3, no. 1, pp. 5–14 (in Russian).
9. Bitimkhan S., Akishev G. The conditions of absolute summability of multiple trigonometric series. *AIP Conf. Proc.*, 2015, vol. 1676, no. 1, 020095. doi: 10.1063/1.4930521.
10. Ul'yanov P.L. Absolute and uniform convergence of Fourier series. *Math. USSR-Sb.*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 169–197. doi: 10.1070/SM1967v001n02ABEH001973.
11. Bitimkhanuly S. Condition for the absolute summability of multiple trigonometric series. *Vestnik Kazakh. Univ. Ser. Mat., Mekh., Inf.*, 2001, no. 1 (24), pp. 3–11 (in Russian).

Received August 31, 2018

Revised March 27, 2019

Accepted April 29, 2019

Samat Bitimkhan. Cand. Phys.-Math. Sci., Karagandy State University named after E. A. Buketov, Karagandy city, 100028 Kazakhstan, e-mail: bsamat10@mail.ru.

Cite this article as: S. Bitimkhan. Conditions of absolute Cesaro summability of multiple trigonometric Fourier series, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 42–47.