

Т.Т.Оспанова

Карагандинский экономический университет Казпотребсоюза

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ДИНАМИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРИМЕСИ В ВОДОХРАНИЛИЩЕ

Сен-Венаннның теңдеулерімен екі өлшемді стационарлық емес модель негізінде Ынтымақ су қоймасындағы ағысты және қоспа тасымалын есептеу жүргізілген. Есептеудің модельдік мысалдары және Ынтымақ су қоймасы бойымен қоспаны алысқа тасымалдау динамикасын есептеу нәтижелері келтірілген.

On the base of 2 times not stationary model with equation of Sen-Vennan are made considering of streams and transfer of admixture in Intumack lake. Coefficients of horizontal change are determine by formula in which we consider nature dynamic speed. There are examples of considering and results of considering long way transfers of admixture in Intumack lake.

Введение

В настоящее время двумерные (плановые) модели, основанные на уравнениях Сен-Венана с осреднением переменных модели по глубине водоема, широко применяются в гидродинамических расчетах [1]. Изучаются точные решения этих уравнений.

В данной работе исследуется дальний перенос примеси по длине водохранилища. Вычислительный алгоритм построен с использованием разностной схемы повышенной точности для моделирования дальнего переноса примеси. Следует учитывать, что формальное повышение порядка аппроксимации адвективных членов уравнений приводит к осциллирующим численным решениям в областях резких изменений градиентов. Для линейного уравнения переноса не существует монотонных конечно-разностных схем с постоянными коэффициентами выше первого порядка аппроксимации. Это обусловило развитие адаптивных к решению численных алгоритмов, обеспечивающих сохранение монотонности численного решения, и высокий порядок численной схемы (TVD-, TVB-, ENO-схемы и др.).

В настоящей работе для повышения точности схемы используется известный подход Ошера–Чакраварти, который в случае скалярных законов сохранения гарантирует невозрастание полной вариации (TVD-свойство) численного решения со временем. Данная методика является обобщением принципа минимальных значений производных и позволяет строить схемы третьего порядка аппроксимации на гладких, плавно изменяющихся решениях. Различные модификации данного алгоритма широко используются в современных методах вычислительной аэрогидродинамики. На его основе предложена простая в реализации консервативная схема предиктор-корректор для уравнений газовой динамики, позволившая получить достаточно точные численные решения разрывов сложной структуры на относительно грубых сетках. В работе процедура построения TVD-схем Ошера–Чакраварти применена в схемах решения пространственных задач гидродинамики в областях реальных конфигураций, таких как проточные части гидротурбин. В настоящей работе такой подход используется при численном моделировании процессов переноса примеси вдоль равнинных водохранилищ.

1. Постановка задачи

Законы сохранения импульсов, массы и уравнения переноса примеси для турбулентного осредненного по глубине течения запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha Q_1}{\partial x_\alpha} - lQ_2 &= -gH \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} HK \frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} - \frac{r|Q|Q_1}{H^2}, \\ \frac{\partial Q_2}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha Q_2}{\partial x_\alpha} - lQ_1 &= -gH \frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} HK \frac{\partial u_2}{\partial x_\alpha} - \frac{r|Q|Q_2}{H^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial HC}{\partial t} + \frac{\partial Q_\alpha C}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} HD \frac{\partial C}{\partial x_\alpha} - k_c HC, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2)$$

Здесь t — время; z — отметка отклонения водной поверхности от ее невозмущенного состояния; $H(t, x_1, x_2)$ — глубина водоема; u_1, u_2 — составляющие скорости жидкости по осям x_1, x_2 соответственно; l — параметр Кориолиса; r — коэффициент трения о дно; K — коэффициент турбулентной вязкости; D — коэффициент турбулентной диффузии вещества; $Q_i = Hu_i$ — удельный расход; C — концентрация примеси; k_c — коэффициент распада примеси.

Наличие горизонтального турбулентного обмена (продольной дисперсии) в уравнениях импульсов (1) обусловило возможность задания граничных условий, содержащих турбулентные или полные потоки импульсов. Краевые условия для системы уравнений (1), (2) записываются в следующем виде. На твердых границах (берег) заданы условия непротекания и отсутствия турбулентных потоков импульсов и примеси:

$$Q_n = 0, \quad HK \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad HD \frac{\partial C}{\partial n} = 0. \quad (3)$$

На жидких границах, где вода вытекает из водоема, заданы расход воды и условие отсутствия турбулентных потоков импульсов и примеси:

$$Q_n = f_n(x, t), \quad HK \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0, \quad (i = 1, 2), \quad HD \frac{\partial C}{\partial n} = 0. \quad (4)$$

На жидких границах, где вода втекает в водоем, заданы расход, полный поток импульсов и полный поток примеси:

$$Q_n = f_n(x, t), \quad Q_n u_i - HK \frac{\partial u_i}{\partial n} = f_n(x, t), \quad (i = 1, 2), \quad Q_n C - HD \frac{\partial C}{\partial n} = f_c(x, t). \quad (5)$$

В (3)–(5) n — вектор нормали к береговому контуру; Q_n — нормальная составляющая вектора удельного расхода; f_n, f_{m_i}, f_c — заданные функции.

Помимо граничных условий (3)–(5), необходимо задать начальные распределения искомых параметров: $Q_1 = Q_1(x_1, x_2), Q_2 = Q_2(x_1, x_2), C = C(x_1, x_2), z = z(x_1, x_2)$ при $z = 0$.

2. Разностные уравнения

Для численного решения сформулированной задачи используется разнесенная C -сетка Аракавы. При этом разностный аналог уравнений (1), (2) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{Q_1^{m+1} - Q_1^m}{\tau} &= -gH \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{z^{m+1} + z^m}{2} - \frac{r|Q|Q_1^{m+1}}{H^2} + \Lambda_1 u_1^m; \\ \frac{Q_2^{m+1} - Q_2^m}{\tau} &= -gH \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \frac{z^{m+1} + z^m}{2} - \frac{r|Q|Q_2^{m+1}}{H^2} + \Lambda_2 u_2^m; \\ \frac{z^{m+1} - z^m}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{Q_1^{m+1} + Q_1^m}{2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{Q_2^{m+1} + Q_2^m}{2} &= 0; \\ \frac{(HC)^{m+1} - (HC)^m}{\tau} &= \Lambda_c C^m - k_c HC^{m+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь τ — шаг по времени; t — номер временного слоя; $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_c$ — конечно-разностные операторы для адвективных членов, а также для членов, характеризующих горизонтальный обмен и силы Кориолиса. При аппроксимации адвективных членов использована указанная выше процедура построения TVD — схем Ошера–Чакраварти.

Вычислительный алгоритм включает пересчет (корректор) с m -го слоя на $m + 1$ -й слой, обеспечивающий второй порядок точности по времени, при этом значения величин на половинном слое определяются как полусумма их значений на m -м слое и значений на $(m + 1)$ -м слое, полученных на предыдущем этапе (предиктор). Уравнение для уровня водной поверхности решается с использованием итерационного метода верхней релаксации.

Приведем подробную процедуру построения этого алгоритма и описание их свойств. Для этого построим равномерную квадратную сетку ω_{ht} [2]:

$$\omega_{h\tau} = \left\{ \begin{array}{l} x_{1_i} = i \cdot h, x_{2_j} = j \cdot h, t_m = m \cdot \tau, i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}, N_1 = 20, N_2 = 6, h = 0, 2, \\ T = 22800, m = 114, \tau = 200 \end{array} \right\}$$

Для $(Q_1^{m+1})_{ij}$, $(Q_2^{m+1})_{ij}$ из (6) получим:

$$\begin{aligned} (Q_1^{m+1})_{ij} &= -\frac{\tau \cdot g H_{ij}^m \cdot E_{ij}^m}{2h_1} (z_{ij}^{m+1} - z_{i-1,j}^{m+1} + z_{ij}^m - z_{i-1,j}^m) - \frac{\tau \cdot E_{ij}^m}{h_1} \left((U_1^m)_{ij} (Q_1^m)_{ij} - (U_1^m)_{i-1,j} (Q_1^m)_{i-1,j} \right) + \\ &+ \frac{1}{h_1} \left(H_{i+1,j}^m K_{i+1,j}^m (U_1^m)_{i+1,j} - (U_1^m)_{ij} (H_{i+1,j}^m K_{i+1,j}^m + H_{ij}^m K_{ij}^m) + (U_1^m)_{i-1,j} H_{ij}^m K_{ij}^m \right) + (Q_1^m)_{ij} \cdot E_{ij}^m, \\ (Q_2^{m+1})_{ij} &= -\frac{\tau \cdot g H_{ij}^m \cdot E_{ij}^m}{2h_2 E_{ij}^m} (z_{ij}^{m+1} - z_{i,j-1}^{m+1} + z_{ij}^m - z_{i,j-1}^m) - \frac{\tau \cdot E_{ij}^m}{h_2} \left((U_2^m)_{ij} (Q_2^m)_{ij} - (U_2^m)_{i,j-1} (Q_2^m)_{i,j-1} \right) + \\ &+ \frac{1}{h_2} \left(H_{i,j+1}^m K_{i,j+1}^m (U_2^m)_{i,j+1} - (U_2^m)_{ij} (H_{i,j+1}^m K_{i,j+1}^m + H_{ij}^m K_{ij}^m) + (U_2^m)_{i,j-1} H_{ij}^m K_{ij}^m \right) + (Q_2^m)_{ij} \cdot E_{ij}^m, \end{aligned} \quad (7)$$

где $E_{ij}^m = \left(\frac{(H_{ij}^m)^2}{(H_{ij}^m)^2 + \tau \cdot r \sqrt{(Q_1^m)_{ij}^2 + (Q_2^m)_{ij}^2}} \right)$.

Подставляя (7) в третье уравнение (6) и введя обозначения, получим:

$$\begin{aligned} z_{ij}^{m+1} \left(1 - (B_1^m)_{ij} - (S_1^m)_{ij} \right) + z_{i,j-1}^{m+1} \left((S_1^m)_{ij} + (P_1^m)_{ij} \right) - z_{i,j-2}^{m+1} (P_1^m)_{ij} + z_{i-1,j}^{m+1} \left((B_1^m)_{ij} + (A_1^m)_{ij} \right) - \\ - z_{i-2,j}^{m+1} (A_1^m)_{ij} - z_{ij}^m \left(1 + (B_1^m)_{ij} + (S_1^m)_{ij} \right) + z_{i,j-1}^m \left((S_1^m)_{ij} + (P_1^m)_{ij} \right) - z_{i,j-2}^m (P_1^m)_{ij} + \\ + z_{i-1,j}^m \left((B_1^m)_{ij} + (A_1^m)_{ij} \right) - z_{i-2,j}^m (A_1^m)_{ij} + \tau \cdot \phi_{ij}^m = 0, i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}, m = \overline{0, m_k}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\phi_{ij}^m = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_{\alpha} (E^m Q_{\alpha}^m + Q_{\alpha}^m) + \tau \left(\sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_{\alpha} (H^m K^m \Lambda_{\alpha} (U_{\alpha}^m)) - \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_{\alpha} (U_{\alpha}^m Q_{\alpha}^m) \right) \right)$, $\alpha = 1, 2$

$$(B_1^m)_{ij} = \frac{\tau^2 g \cdot H_{ij}^m}{4h_1^2 \cdot E_{ij}^m}, (A_1^m)_{ij} = \frac{\tau^2 g \cdot H_{i-1,j}^m}{4h_1^2 \cdot E_{i-1,j}^m}, (P_1^m)_{ij} = \frac{\tau^2 g \cdot H_{i,j-1}^m}{4h_2^2 \cdot E_{i,j-1}^m}, (S_1^m)_{ij} = \frac{\tau^2 g \cdot H_{ij}^m}{4h_2^2 \cdot E_{ij}^m}.$$

Вводим обозначения в (8):

$$\begin{aligned} l = N_2 \cdot (i-1) + j, i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}, \\ (G_1)_{ll} = 1 - (B_1^m)_{ij} - (S_1^m)_{ij}, (G_1)_{l,l-1} = (P_1^m)_{ij} - (S_1^m)_{ij}, (G_1)_{l,l-N_2} = (A_1^m)_{ij} + (B_1^m)_{ij}, \\ (G_1)_{l,l-2 \cdot N_2} = -(A_1^m)_{ij}, (\phi_1)_l = \phi_{ij}^m \cdot \tau, (y)_l = z_{ij}^m, (y^m)_l = z_{ij}^{m+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, получили квадратную матрицу $(G_1)_{ij}$, $(i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n})$, векторы $(\phi_1)_i, (y)_i, (y^m)_i$ $(i = \overline{1, n})$, где $n = N_1 \cdot N_2$. Тогда уравнение (8) примет вид:

$$\sum_{j=1}^i (G_1)_{ij} (y^m)_j + \sum_{j=1}^i (G_1)_{ij} (y)_j - 2y_i + (\phi_1)_i = 0, i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Как видно из (10), верхняя треугольная матрица обращается в нуль. Для решения уравнения (10) используем метод верхней релаксации:

$$\left(A + \frac{1}{\omega} D \right) \cdot (y^{m+1} - y^m) + A \cdot y^m = f, \quad (11)$$

где ω — параметр сходимости ($0 < \omega < 2$). Записываем (10) в виде (11):

$$\left(\sum_{j=1}^{i-1} (G_1)_{ij} + \frac{1}{\omega} (G_1)_{ii} \right) \cdot ((y^m)_j - (y)_j) + 2 \sum_{j=1}^i (G_1)_{ij} (y)_j - 2y_i + (\phi_1)_i = 0, i = \overline{1, n}.$$

Отсюда находим:

$$(y^m)_j = -\frac{\omega}{(G_1)_{ij}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} (G_1)_{ij} (y^m)_j + \sum_{j=1}^{i-1} (G_1)_{ij} (y)_j + 2y_i ((G_1)_{ii} - 1) + (\phi_1)_i \right) + y_i, i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Для определения z_{ij}^{m+1} обратно используем (12):

$$l = N_2 \cdot (i-1) + j, \text{ и } z_{ij}^{m+1} = (y^m)_l, \text{ где } i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}. \quad (13)$$

Подставляя значения z_{ij}^{m+1} в (7), находим расход $(Q_1^{m+1})_{ij}$ и $(Q_2^{m+1})_{ij}$. Далее определяем концентрацию примеси C_{ij}^{m+1} в (7):

$$C_{ij}^{m+1} = \frac{1}{H_{ij}^{m+1} + \tau k_c H_{ij}^m} \left(H_{ij}^m C_{ij}^m - \frac{\tau}{h_1} \left((Q_1^m)_{ij} C_{ij}^m - (Q_1^m)_{i-1j} C_{i-1j}^m \right) - \frac{\tau}{h_1^2} \left((H_{i+1j}^m D_{i+1j}^m C_{i+1j}^m - (H_{i+1j}^m D_{i+1j}^m + H_{ij}^m D_{ij}^m) C_{ij}^m + H_{ij}^m D_{ij}^m C_{i-1j}^m \right) \right), \quad (14)$$

где $H_{ij}^{m+1} = H_{ij}^m + z_{ij}^{m+1}$, $D_{ij}^m = 6,2H_{ij}^m \sqrt{(U_1)_{ij}^2 + (U_2)_{ij}^2}$.

3. Результаты численных расчетов

Для тестирования предложенного алгоритма численно решена задача о распространении консервативной примеси ($k_c = 0$) в канале (рис. 1). Длина канала полагалась равной 20 км, ширина 6 км, глубина 10 м. В расчетной области строилась равномерная квадратная сетка с шагами, равными 200 м. Шаг по времени полагался равным 200 с.

Сначала был проведен расчет установившегося равномерного течения в канале со скоростью 0,5 м/с при заданных расходах $Q_1 = 5 \text{ м}^2/\text{с}$ во входном (левая граница) и выходном (правая граница) сечениях. При этом коэффициенты турбулентной диффузии K и D полагались равными [1]: $K = D = 6,2\text{Hu}_*$ (u_* — динамическая скорость на дне водоема).

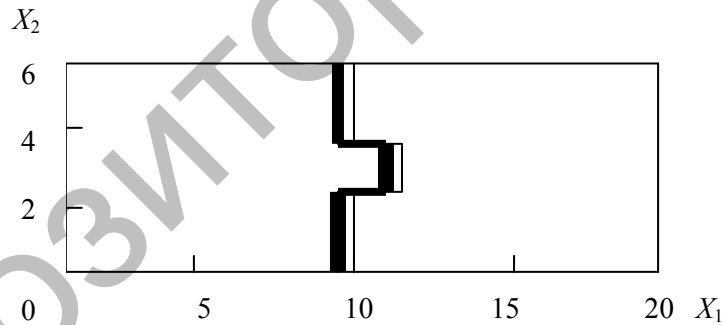


Рис. 1. Результаты расчета распространения примеси в момент времени $t = 22800 \text{ с}$

Фоновая концентрация примеси составляла 5 мкг/л. Затем моделировался локальный сброс примеси в средней части входного сечения (полосе шириной 800 м), в которой задавалась концентрация примеси, равная 30 мкг/л. Через 2800 с это условие скачкообразно переносилось на всю область входного сечения.

На рисунке 1 представлены результаты расчета распространения примеси в момент времени $t = 22800 \text{ с}$ (114 шагов по времени), полученные по предложенной TVD-схеме предиктор-корректор второго порядка аппроксимации. Видны внутренние слои, ширина которых составляет три разностных интервала. Их положение соответствует точному разрывному решению задачи при отсутствии диффузионного переноса, что подтверждает консервативность схемы. Следует также отметить неосциллирующее поведение численного решения в областях с особенностями. Дальнейшее измельчение сетки не приводит к повышению точности расчета. Это свидетельствует о том, что диссипативные свойства схемы не преобладают над диффузионными свойствами модели.

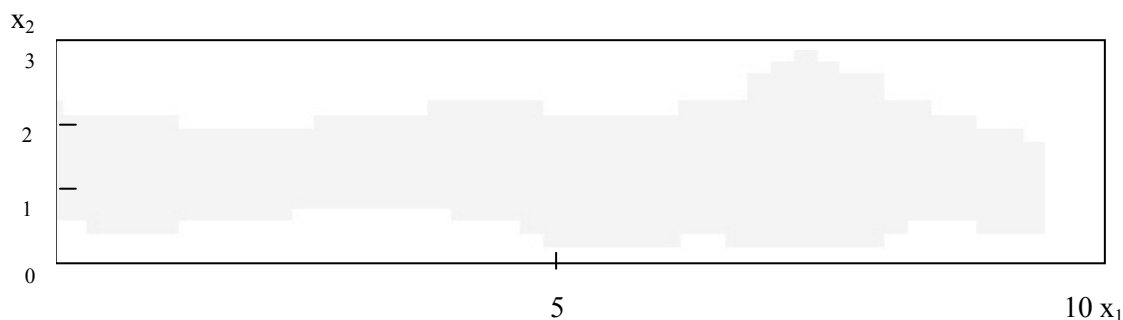


Рис. 2. Интумакское водохранилище

На основе изложенной выше модели и указанной численной схемы выполнены расчеты течения и процессов дальнего переноса примеси в Интумакском водохранилище.

Интумакское водохранилище представляет собой неширокий вытянутый водоем (рис. 2) протяженностью около 10 км. Основные его параметры следующие: максимальная ширина 3 км, максимальная глубина 6,61 м, средняя глубина 3,2 м. Расход воды в водохранилище составляет $1000 \text{ м}^3/\text{с}$, коэффициент трения о дно 0,067.

В численных расчетах шаг по времени составлял 5 с, шаг сетки 200 м. Расход воды в водохранилище во входном сечении равен $Q_1 = 1000 \text{ м}^3/\text{с}$. Расчет стокового течения был начат от состояния покоя при начальной концентрации примеси, равной 5 мкг/л. Во входных сечениях задавались также фоновые значения концентрации примеси, равные 5 мкг/л. Сначала был проведен расчет начального распределения во входном (левая граница) сечении скорости течения и расхода воды:

$$(U_\alpha)_{ij} = \frac{(Q_\alpha)_{ij}}{S_{ij}}, \alpha = 1, 2, S_{ij} = H_{ij} \cdot h_2, (Q_\alpha)_{ij} = (U_\alpha)_{ij} \cdot H_{ij}.$$

Заданы функции:

$$(f_n)_j = (Q_1^m)_{0j}, (f_{n_k})_j = (Q_1^m)_{N_{1j}}, (f_{n_1})_j = (Q_1^m)_{0j} \cdot (U_1)_{0j}, (f_{n_2})_j = (Q_2^m)_{0j} \cdot (U_2)_{0j}, (f_{n_c})_j = 0,005 \cdot (Q_1^m)_{0j}.$$

Анализ результатов расчета показал, что динамика распространения примеси в водохранилище при ее поступлении с водами через входное сечение с постоянной концентрацией составляет 5 мкг/л. Распределение примеси по длине водохранилища имеет структуру «волны». Примесь продвигается вдоль водохранилища, сохраняя постоянную концентрацию за фронтом «волны». Численные данные результата совпали с экспериментальными данными.

Список литературы

1. Квон В.И., Квон Д.В., Зонов С.Д., Карамышев В.Б. Численный расчет течений и дальнего переноса примеси в равнинных водохранилищах // Прикладная механика и техническая физика. — Новосибирск: СО РАН, 2003. — Т. 44. — № 6. — С. 158–163.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.