КОНДЕНСАЦИЯЛАНҒАН КҮЙДЕГІ ЗАТТАРДЫҢ ФИЗИКАСЫ
ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

УДК 530.21; 530.24; 530.012

В.В.Архипов, А.С.Кудусов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АНАЛОГА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТОПОЛОГИИ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Мақала метрлік кеңістіктің фазалық кеңістікке топологиясының аналитикалық зерттеу әдісін қолданылуын тексеруге арналған. Зерттеулер нәтижесінде когомологиялық сигма-моделінің шегінде құрылған гамильтон механикасының Лаплас операторларының аналогтары фазалық кеңістіктің топологиясын зерттеуге мүмкіндік бермейтіні көрсетілді.

In this work we investigate an analogue of Laplace's operator on phase space. This construct was built in frame of geometry analysis of nonlinear cohomological sigma-model classical mechanics. As examples of nontrivial symplectic manifolds there are used phase space of a hard rotator and space with induced Sklyanin's brackets in the article. As a result of our investigations we have concluded that analogue of Laplace's operator on phase space can not be used as usual one on Riemannian space. It impossible to find nontrivial solutions of appropriate harmonic equations, that should be give information about space topology.

1. Введение

Основным методом вычисления топологических классов римановых пространств является анализ гармонических уравнений вида $\Delta\rho = 0$ на предмет числа линейно независимых решений. Согласно теореме Ходжа количество таких решений равно числу нестягиваемых *k*-мерных циклов, где *k* — ранг дифференциальной формы *р*. Непосредственное применение этого метода к фазовым пространствам невозможно ввиду отсутствия на них метрического тензора g_{ij} и, следовательно, невозможности введения оператора Лапласа Δ. Однако в результате геометрической интерпретации основных симметрий когомологической сигма-модели гамильтоновой механики были построены аналоги таких операций римановой геометрии, как дивергенция и оператор Лапласа для их применения на фазовом пространстве. В результате встал вопрос о том, насколько полно соответствие упомянутых операций римановой геометрии и их аналогов. В частности, можно ли использовать аналог оператора Лапласа для исследования топологии фазового пространства.

Актуальность настоящей работы обусловлена, как минимум, двумя нерешенными проблемами: во-первых, отсутствием универсального подхода к исследованию топологических свойств неметрических пространств — такого, какой используется в римановой геометрии, и, во-вторых, необходимостью проверки предложенной геометрической интерпретации дифференциальных операций, построенных в рамках функционального подхода к классической механике, как аналогов оператора дивергенции и оператора Лапласа.

Теоретической основой работы является геометрическая интерпретация БРСТ и анти-БРСТ операторов классической механики, предложенная в работах [1–3].

Введем основные элементы нелинейной когомологической сигма-модели классической механики. Обозначим координаты на 2*n*-мерном фазовом пространстве как a^i, где индекс пробегает значения $i = 1,..., 2n$. Для определенности будем считать, что первые *n* координат соответствуют обобщенным координатам, а вторые — обобщенным импульсам: $a^i = \{q_1,...,q_n, p_1,..,p_n\}$.

Будем считать, что на рассматриваемом фазовом пространстве задана скобка Пуассона вида

$$\left\{ f(a), g(a) \right\} = \varphi^{ij} \partial_i f \partial_j g \ , \tag{1}$$

где $\varphi^{ij} = \varphi^{ij}(a)$) — так называемый скобочный тензор, $\partial_i = \partial / \partial a^i$. Если скобочный тензор невырожден, то может быть определен обратный *к* φ тензор ω_{ij}, такой что $\omega_{ij}\, \psi^{jk} = \psi^{kj}\omega_{ji} = \delta_i^k$. Этот тензор может быть представлен в виде симплектической 2-формы:

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij} \partial a^i \wedge \partial a^j \ , \tag{2}$$

определяющей площади и объемы в фазовом пространстве.

Будем считать, что на рассматриваемом фазовом пространстве задана функция Гамильтона $H(a)$, с которой связано гамильтоново векторное поле

$$h^i(a) = \psi^{ij}(a)\partial_j H(a) \,. \tag{3}$$

Ассоциированные с этим полем уравнения Гамильтона

$$\dot{a}^i = h^i(a) \tag{4}$$

определяют фазовые динамические траектории, вдоль которых эволюционируют физические системы.

Гоцци, Гетер и Такер [3] предложили записать производящий функционал классической механики в следующем простом виде:

$$Z = \int D a \delta(a^i - a^i_{cl}) \,, \tag{5}$$

где a^i_{cl} — классические решения уравнений Гамильтона (4). То есть среди всех возможных эволюций физической системы выживает только та, которая удовлетворяет классическим уравнениям (4). Функция Лагранжа, следующая из этого производящего функционала, имеет вид

$$L = \lambda_i \dot{a}^i - \lambda_i h^i + i\bar{c}_i \dot{c}^i - i\bar{c}_i \partial_j h^i c^j \,. \tag{6}$$

Здесь появились дополнительные коммутирующие поля λ_i и антикоммутирующие (грассмановы) поля c^i и $\bar{c}_j$. Этот лагранжиан служит основой когомологической сигма-модели классической механики.

Исследование уравнений движения дополнительных полей, следующих из лагранжинана, привело к их следующей геометрической интерпретации. Поле λ_i преобразуется как калибровочное, чем и является по своей сути, фиксируя условие подчинения фазовых траекторий классическим уравнениям Гамильтона. Поля c^i преобразуются как дифференциалы dx^l и могут быть использованы в качестве базиса в пространстве антисимметричных ковариантных тензоров. Дополнительные поля c^i ведут себя как $\partial / \partial x^i$ или как $\partial / \partial c^i$ и могут быть использованы в качестве базиса в пространстве антисимметричных контравариантных тензоров.

2. Геометрическая интерпретация БРСТ симметрии гамильтоновой механики

Оказалось, что лагранжиан когомологической сигма-модели классической механики инвариантен относительно инфинитезимальных БРСТ и анти-БРСТ преобразований.

Операторное представление соответствующих операторов, генерирующих эти преобразования, имеет вид [2]:

$$\hat{Q} = c^i \frac{\partial}{\partial a^i} + i\lambda_i \frac{\partial}{\partial \vec{c}_i} \,, \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \hat{Q} = -\psi^{ij} c^i \frac{\partial}{\partial a^i} + (i\psi^{ij}\lambda_j + c^k \partial_k \psi^{ij} \bar{c}_j) \frac{\partial}{\partial c^i} + \\ + \frac{1}{2}\partial_i \psi^{km} \bar{c}_m \bar{c}_k \frac{\partial}{\partial \bar{c}_i} + (\partial_i \psi^{km} \bar{c}_m \lambda_k + \frac{i}{2}\partial_{im}\partial_k \psi^{jm} c^k \bar{c}_m \bar{c}_j) \frac{\partial}{\partial \lambda_i}. \end{gathered} \tag{8}$$

Геометрически оператор БРСТ симметрии можно интерпретировать как ковариантную производную на фазовом пространстве. То есть оператор $\hat{Q}$ можно сопоставить с оператором ∇, имеющим вид:

$$\nabla = c^s \partial_s - c^s c^m \Gamma^j_{ms} \frac{\partial}{\partial c^j} + c^s \overline{c}_j \Gamma^j_{ms} \frac{\partial}{\partial \overline{c}_m}, \tag{9}$$

где Γ^j_{ms} — символы Кристоффеля или связность на фазовом пространстве. Здесь используется ковариантная запись оператора ∇ в базисе дополнительных поле $c^s, \overline{c}_j$. Понятие связности обычно не рассматривается на фазовом пространстве, однако оно должно быть обязательно введено в рамках рассматриваемой теории. Его отсутствие приведет к невозможности производить корректным образом такие необходимые математические операции, как дифференцирование и параллельный перенос векторов. При этом дополнительное поле λ_i когомологической сигма-модели классической механики идентифицируется как

$$\lambda_i = -ic^s \overline{c}_j \Gamma^j_{is}. \tag{10}$$

Такая идентификация вполне оправданна ввиду того, что сами символы кристоффеля преобразуются подобно λ_i как калибровочные поля.

Что касается геометрической интерпретации оператора анти-БРСТ преобразования $\widehat{Q}$, то сложные рассуждения [2] приводят к его сопоставлению с контравариантной производной:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla} = (-1)^{p+1,} (-\psi^{ij} \overline{c}_j \partial_i + (c^m \overline{c}_k \psi^{ij} \Gamma^k_{jm} + c^k \overline{c}_j \partial_k \psi^{ij}) \frac{\partial}{\partial c^i} + \frac{1}{2} \overline{c}_m \overline{c}_k \partial_l \psi^{km} \frac{\partial}{\partial \overline{c}^i} + \\ + c^m \overline{c}_k \psi^{ij} \omega_{ml} \nabla_j \psi^{kl} \frac{\partial}{\partial c^i} - c^m \overline{c}_k \mathrm{T}^i_{ms} \psi^{sk} \frac{\partial}{\partial c^i} + \frac{1}{2} \overline{c}_i \overline{c}_r \psi^{is} \psi^{mr} \mathrm{T}^k_{ms} \omega_{lk} \frac{\partial}{\partial \overline{c}_l}), \end{aligned} \tag{11}$$

где $T^i_{ms} = \Gamma^i_{ms} - \Gamma^i_{ms}$ — тензор кручения фазового пространства.

Приведенная геометрическая интерпретация является неполной. Стандартный подход к разработке лагранжиана (6) предусматривает наложение квантовых коммутационных соотношений между канонически сопряженными полями:

$$\left[a^i, q_j\right] = i\delta^i_j \; \left[c^i, \overline{c}_j\right] = \delta^i_j. \tag{12}$$

Такой подход приводит в стандартном формализме к необходимости трактовки оператора анти-БРСТ симметрии как дивергенции на фазовом пространстве. Ввиду этого возник вопрос о том, как реализовать такое представление анти-БРСТ оператора. Отсутствие метрического тензора на фазовом пространстве вроде бы целиком исключает такой путь. Однако было замечено, что в стандартном определении оператора Ходжа [4] метрический тензор используется только для поднятия и опускания индексов, а его детерминант необходим как мера объема. Мера объема фазового пространства может быть найдена с помощью симплектического тензора. Он же, имея в виду его структуру в общем случае:

$$\omega = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}^n \left(\frac{\partial g_{nj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ni}}{\partial x^j} \right) & \left[-g^{ij}\right] \\ \left[g^{ij}\right] & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

может использоваться для поднятия и опускания индексов. Эта идея привела к двум вариантам оператора Ходжа на фазовом пространстве. Один из них действует на пространстве ковариантных форм, а другой — на расширенном пространстве дифференциальных форм, антисимметричных как по нижним, так по верхним индексам. Таким образом, появилась возможность построить соответствующие операторы дивергенции на фазовом пространстве по стандартной схеме

$$\overline{D} = -*d*. \tag{14}$$

Аналог оператора дивергенции, действующий на пространстве ковариантных антисимметричных форм, таким образом, имеет вид:

$$\overline{D}_p = (-1)^{p+1} \left\{ \psi^{ij} \partial_i \frac{\partial}{\partial c^j} + \partial_i \psi^{ij} \frac{\partial}{\partial c^j} - \frac{1}{2} \partial_i \psi^{km} \frac{\partial}{\partial c^m} \frac{\partial}{\partial c^k} \widehat{c}^i \right\}. \tag{15}$$

Оператор, действующий на расширенном пространстве, имеет более громоздкий вид:

$$\overline{D}_p = (-1)^{p+1} \left\{ -\psi^{ij} \partial_i \frac{\partial}{\partial c^j} + (\psi^{ij} \Gamma^k_{jm} + \partial_m \psi^{im}) \frac{\partial}{\partial \overline{c}_m} \frac{\partial}{\partial c^k} \widehat{\overline{c}}^i + \frac{1}{2} \partial_i \psi^{kim} \frac{\partial}{\partial c_m} \frac{\partial}{\partial c^k} \widehat{c}^i \right\}. \tag{16}$$

Оператор Лапласа, действующий на пространстве антисимметричных ковариантных дифференциальных форм может быть определен следующим стандартным образом:

$$\Delta_p = \nabla_p \vec{D}_p + \vec{D}_p \nabla_p, \tag{17}$$

где ∇_p — сужение оператора (9) до действия на соответствующем пространстве. Таким образом, для аналога оператора Лапласа получаем выражение

$$\Delta_p = -\sqrt{\det\psi}\,\partial_k(\sqrt{\det\omega}\,\psi^{kim})\partial_m - \partial_s(\sqrt{\det\psi}\,\partial_k(\sqrt{\det\omega}\,\psi^{kim}))c^s \frac{\partial}{\partial c^m}. \tag{18}$$

Сужение этого оператора до действия на 0-формы $\rho = \rho(a)$,

$$\Delta_p\rho = -\sqrt{\det\psi}\,\partial_k(\sqrt{\det\omega}\,\psi^{kim})\partial_m\rho, \tag{19}$$

имеет вид, аналогичный оператору, определенному на римановом пространстве. Расширенные операторы Ходжа и дивергенции позволяют построить следующий аналог оператора Лапласа:

$$\Delta = \nabla\vec{D} + \vec{D}\nabla. \tag{20}$$

Таким образом, этот оператор, действующий на расширенном пространстве ко- и контравариантых антисимметричных дифференциальных форм, имеет вид:

$$\Delta = \left[\nabla, D\right] = \frac{1}{2}\psi^{jk}(\partial_k\Gamma^i_{nj} - \partial_j\Gamma^i_{nk} + \Gamma^i_{kl}\Gamma^l_{nj} - \Gamma^i_{jl}\Gamma^l_{nk})\bar{c}_i \frac{\partial}{\partial\bar{c}_m}. \tag{21}$$

Учитывая, что выражение в скобках является тензором кривизны [4], получаем:

$$\Delta = \frac{1}{2}\psi\ ijR^i_{njk}\bar{c}_i \frac{\partial}{\partial\bar{c}_n}. \tag{22}$$

Таким образом, этот оператор исчезает на плоском симплектическом многообразии. Отметим также, что относительно оператора Δ все ковариантные дифференциальные формы являются гармоническими, в том смысле, что $\Delta\rho(a) = 0$.

3. Жесткий ротатор

Рассмотрим материальную точку, двигающуюся по окружности фиксированного радиуса *R*. Динамические траектории такой точки лежат на цилиндре. Действительно, для описания положения точки достаточно одной пространственной координаты, а именно циклической координаты ϕ. Роль обобщенного импульса, как это известно из курса теоретической физики, играет проекция момента импульса на ось *z*, которую мы направим перпендикулярно плоскости окружности. Таким образом, топология соответствующего фазового пространства вполне ясна. Если точка совершает вращательное движение, то ее фазовые траектории охватывают цилиндр, координатами на котором являются ϕ и L_z. Все такие решения являются топологически нетривиальными, в том смысле, что они не могут быть непрерывным образом стянуты в точку. Для этого замкнутая траектория должна разорваться. Если точка совершает вращательные колебания, то фазовые траектории точки замкнуты, но не охватывают цилиндр. Следовательно, они могут быть гладко деформированы в точку, т.е. эти траектории топологически эквивалентны точке.

Если бы цилиндр рассматривался в римановом пространстве, то гармоническое уравнение имело бы два класса линейно независимых решений. Один из них описывал бы движение точки по окружности, а другой, топологически не эквивалентный первому, — вращательные колебания.

Индуцированная метрика на окружности может быть найдена по формуле [4]:

$$g_{\phi\phi} = \frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial x}{\partial\phi} + \frac{\partial y}{\partial\phi}\frac{\partial y}{\partial\phi} = R^2. \tag{23}$$

Таким образом, скобочный тензор согласно (13) имеет вид

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{R^2} \\ \frac{1}{R^2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Симплектический тензор может быть найден как обратный к φ:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -R^2 \\ R^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Так как и скобочный тензор φ и симплектическая 2-форма ω постоянны, а оба слагаемых аналога оператора Лапласа Δ_p содержат производные от φ и ω, то этот оператор обращается в ноль. Таким образом, решать гармонические уравнения оказывается невозможным.

Этот простой пример показывает невозможность использования аналога оператора Лапласа Δ_p для исследования топологических свойств фазовых пространств. Однако цилиндр является бесконечным объектом, и, возможно, мы имеем дело с особенностями на $\pm\infty$. Чтобы исключить такую возможность, следует рассмотреть другие примеры, ограниченные по импульсам. Однако это потребует модернизации всей исходной когомологической сигма-модели.

Теперь рассмотрим поведение обобщенного оператора Лапласа на цилиндре, образованном циклической пространственной координатой ϕ и L_z импульсной координатой. В рассматриваемом двумерном случае оператор Лапласа (22) должен действовать на так называемые *q*-формы вида

$$\rho = \rho_0 + \overline{c}_i \rho^1 + \overline{c}_2 \rho^2 + \overline{c}_1 \overline{c}_2 \rho^{12}. \tag{26}$$

Первая из составляющих ρ_0 — это обычная функция, вторая и третья — это векторное поле $\rho = (\rho^1, \rho^2)$ в базисе дополнительных полей $\overline{c}_i$. Последняя составляющая p^{12} — это компонента антисимметричного контравариантного тензорного поля второго ранга.

Для того чтобы найти компоненты символов Кристоффеля на рассматриваемом двумерном цилиндре, вложенном в четырехмерное фазовое пространство, можно воспользоваться их законом преобразования от одной системы координат к другой. Несмотря на то, что этот закон выведен для римановых пространств, вполне очевидно, что он не должен меняться и при переходе к фазовому пространству:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma'^m_{np} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^n}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}. \tag{27}$$

Учитывая, что объемлющее пространство предполагается плоским, будем считать, что все символы Кристоффеля на нем равны нулю, таким образом:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{\partial^2 x'^n}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}. \tag{28}$$

Под штрихованными координатами будем понимать набор координат объемлющего фазового пространства x, y, p_x, p_y. Нештрихованные координаты — это координаты на цилиндре ϕ и L_z (индекс *z* в дальнейшем писать не будем, чтобы не загромождать формулы). Эти новые координаты могут быть связаны со старыми следующими выражениями:

$$\begin{cases} tg\phi = y / x \\ L = R\sqrt{p_x^2 + p_y^2} \end{cases}. \tag{29}$$

Старые координаты через новые выражаются так:

$$\begin{cases} x = R\cos\phi \\ y = R\sin\phi \\ p = -\dfrac{L}{R}\sin\phi \cdot \\ p = \dfrac{L}{R}\cos\phi \end{cases} \tag{30}$$

Явная формула для первого из символов Кристоффеля имеет вид

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\partial^2 x}{\partial \phi^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 p_x}{\partial \phi^2} \frac{\partial \phi}{\partial p_x} + \frac{\partial^2 p_y}{\partial \phi^2} \frac{\partial \phi}{\partial p_y}. \tag{31}$$

Непосредственная подстановка функций (29) и (30) показывает, что компонента связности $\Gamma^1_{11} = 0$. Повторяя схему вычислений для остальных компонент, получаем, что и все остальные символы Кристоффеля тоже равны нулю, кроме одного — $\Gamma_{11}^{2} = -L$. С учетом этого выражение (21) упрощается:

$$\Delta = \varphi^{12} \frac{\partial \Gamma_{11}^{2}}{\partial x^{2}} \delta \frac{\partial}{\partial \overline{c}_1} . \tag{32}$$

Учитывая, что $\varphi^{12} = -1 / R^2$, а $x^2 = L$, получаем:

$$\Delta = \frac{1}{R^2} \overline{c}_2 \frac{\partial}{\partial \overline{c}_1} . \tag{32}$$

Таким образом, векторные поля, обнуляемые оператором Δ, должны иметь вид $\overline{\rho} = (0, \rho^2)$. Действительно, только одна компонента суперполя (26) может «выжить» под действием оператора $\overline{c}_2 (\partial / \partial \overline{c}_1)$. Слагаемые ρ_0 и $\overline{c}_2 \rho^2$ обнуляются в силу того, что они не содержат зависимости от поля $\overline{c}_1$. Последнее слагаемое обнуляется ввиду грассмановости полей $\overline{c}_i$, т.е. $(\overline{c}_2) = 0$. Таким образом, аналогом гармонических суперполей для рассматриваемого оператора Δ являются любые суперполя вида

$$\rho = \rho_0 + \overline{c}_2 \rho^2 + \overline{c}_1 \overline{c}_2 \rho^{12} . \tag{34}$$

Отметим, что «гармоническим» векторным полем является поле, направленное вдоль оси *L*, т.е. имеющее вид $\rho = (0, \rho^2)$, и это единственный класс векторных полей, ассоциированные с которыми динамические траектории не имеют физического смысла, так как соответствуют процессу мгновенного изменения момента импульса.

4. Заключение

В результате проведенного исследования мы показали, что построенные в рамках когомологической сигма-модели гамильтоновой механики аналоги операторов Лапласа не позволяют исследовать топологию фазовых пространств, а именно: нами была рассмотрена классическая задача жесткого ротатора. Аналог оператора Лапласа Δ_p обращается в тождественный ноль ввиду постоянства скобочного тензора *ф*. Расширенный аналог оператора Лапласа $\Delta_p q$ в ноль не обращается. Связанные с ним гармонические уравнения имеют множество решений, которые невозможно связать с известной топологией фазового пространства жесткого ротатора. В частности, среди векторных полей вид «гармонических» имеют поля, направленные вдоль оси обобщенного импульса, что соответствует мгновенному изменению момента импульса. Такие процессы не являются физическими.

Таким образом, вопрос об аналитическом исследовании топологических свойств симплектических пространств остается открытым.

К сожалению, нам не удалось выявить источники несоответствия построенных для фазового пространства аналогов дифференциальных операторов с их прототипами на римановых пространствах. Причиной этого, возможно, является то, что группа движений фазовых пространств сильно отличается от группы движений метрических пространств. В частности, можно указать на неудаляемую особенность любого двумерного фазового пространства при равенстве нулю обобщенного импульса. Такие фазовые траектории вырождаются в непрерывный набор возможных состояний, на которых нельзя использовать время в качестве параметра. Этот и возможные другие эффекты могут приводить к тривиальности топологии фазовых пространств в общепринятом римановом смысле.

Список литературы

1. *Aringazin A.K., Aringazin K.M. and Arkhipov V.* BRST Symetries in Cohomological Classical Mechanics // Hadronic J. — 1994. — Vol. 17. — P. 429–439.
2. *Архипов В.В., Бондарцев А.А., Кудусов А.С.* Аналог оператора Ходжа на симплектическом многообразии // Вестн. Евразийского нац. ун-та им. Л.Н.Гумилева. — Астана, 2006. — № 2(48). — С. 95–107.
3. *Gozzi E., Reuter M. and Thacker W.D.* Symmetries of the classical path integral on a generalized phase space manifold // Phys. Rev. D. — 1992. — Vol. 46. — P. 757–765.
4. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1979. — 760 с.