УДК 517.956, 517.968.2

М.Т.Космакова, М.Т.Мизамбаева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (Svetik_mir69@mail.ru)

Об однородной краевой задаче для уравнения теплопроводности в вырождающейся области

Рассмотрена краевая задача теории теплопроводности в области с подвижной границей и соответствующее особое интегральное уравнение Вольтерра, к которому она редуцируется. Особенность рассматриваемого интегрального уравнения выражена в том, что неоднородное уравнение не может быть решено методом последовательных приближений. Решено однородное уравнение, соответствующее линейному закону движения границы $\alpha(t) = t$. В результате получена собственная функция рассматриваемого особого интегрального уравнения и ненулевое решение однородной краевой задачи.

Ключевые слова: уравнение Вольтерра второго рода, вырождающаяся область, подвижная граница, преобразование Лапласа, собственная функция.

К изучению краевых задач для уравнений в частных производных в областях с нерегулярными точками на подвижной границе приводят многие важные прикладные задачи. В связи с постоянным увеличением объема использования контактной техники актуальными являются проблемы оптимального выбора параметров контактных материалов и режимов их работы. Поэтому изучение теплофизических процессов, происходящих в контактах, является необходимым условием новых достижений в автоматике и приборостроении, сварочной технике, электротехнической аппаратуре и в различных устройствах, где контактные элементы служат одним из основных звеньев.

К числу наиболее важных факторов, влияющих на износостойкость и надежность различных контактных систем, относятся процессы тепло- и массообмена. Интенсивно ведущиеся в последнее время исследования тепловых режимов работы электрических контактов носят преимущественно экспериментальный характер. Вместе с тем с развитием современной контактной техники и тенденцией к повышению быстродействия электрических аппаратов создается такая ситуация, при которой из-за кратковременности процесса оказывается практически невозможно замерить температурное поле контактной системы и тем более динамику его изменения во времени. В этом случае только теоретическое решение задачи о нагреве способно дать представление о характере изменения температурного поля. Математическое моделирование тепловых процессов, связанных с изменением агрегатного состояния вещества – плавлением, затвердеванием, приводит к необходимости изучения задач для параболических уравнений в областях с подвижными границами, известными и неизвестными.

Краевые задачи для уравнений параболического типа в областях с движущейся границей принципиально отличаются от классических. Вследствие зависимости размера области от времени, тем более когда область вырождается в некоторых точках, к этому типу задач в общем случае не применимы методы разделения переменных и интегральных преобразований, так как, оставаясь в рамках классических методов математической физики, не удается согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границы области теплопереноса. Поэтому вопрос об исследовании краевых задач в области с вырождением в начальный момент времени является актуальным.

Рассмотрение широкого круга вопросов математической физики, в частности, решение краевых задач уравнения теплопроводности в вырождающихся областях, приводит к необходимости исследования особых интегральных уравнений Вольтерра. Конструктивные методы решения рассматриваемых тепловых задач для параболических уравнений, основанные на использовании тепловых потенциалов и редукция исходных краевых задач к интегральным уравнениям, были развиты Е.И.Кимом [1].

Рассмотрим первую краевую задачу теплопроводности в вырождающейся области (области с подвижной границей):

В области $G = \{(x;t): \quad t > 0, \quad 0 < x < \alpha(t)\}$ найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \upsilon(t); \quad u(x,t)\big|_{x=\alpha(t)} = \omega(t). \tag{2}$$

Подвижную границу $\alpha(t)$ будем считать положительной, монотонно возрастающей, дифференцируемой при $t>0$ и обращающейся в нуль в точке $t=0$. Функции $\upsilon(t)$ и $\omega(t)$ считаем непрерывными. Если потребуется, чтобы решение было непрерывным в окрестности $t=0$, необходимо наложить дополнительно условие согласования $\upsilon(0)=\omega(0)$.

Решение задачи (1)–(2) ищем в виде суммы тепловых потенциалов двойного слоя [2]:

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{x}{\left(t-\tau\right)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \nu(\tau)\,d\tau + \\ & + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{x-\alpha(\tau)}{\left(t-\tau\right)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\left(x-\alpha(\tau)\right)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{3}$$

Известно, что функция (3) удовлетворяет уравнению (1) при любых $\nu(t)$ и $\varphi(t)$. Используя условия (2) и свойства тепловых потенциалов, имеем следующую систему интегральных уравнений относительно неизвестных плотностей $\nu(t)$ и $\varphi(t)$ [3]:

$$\begin{cases} \upsilon(t) = \dfrac{\nu(t)}{2a^2} - \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \dfrac{\alpha(\tau)}{\left(a^2(t-\tau)\right)^{3/2}} \exp\left\{-\dfrac{\alpha^2(\tau)}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau)\,d\tau; \\ \omega(t) = -\dfrac{\varphi(t)}{2a^2} + \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \dfrac{\alpha(t)-\alpha(\tau)}{\left(a^2(t-\tau)\right)^{3/2}} \exp\left\{-\dfrac{\left(\alpha(t)-\alpha(\tau)\right)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau)\,d\tau + \\ \qquad + \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \dfrac{\alpha(t)}{\left(a^2(t-\tau)\right)^{3/2}} \exp\left\{-\dfrac{\alpha^2(t)}{4a^2(t-\tau)}\right\} \nu(\tau)\,d\tau. \end{cases} \tag{4}$$

Соответствующими преобразованиями данную систему уравнений можно свести к одному особому интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\begin{aligned} & -\frac{\varphi(t)}{2a^2} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\alpha(t)-\alpha(\tau)}{\left(a^2(t-\tau)\right)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\left(\alpha(t)-\alpha(\tau)\right)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau)\,d\tau + \\ & + \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\alpha(t)+\alpha(\tau)}{\left(a^2(t-\tau)\right)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\left(\alpha(t)+\alpha(\tau)\right)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau)\,d\tau = q(t), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$q(t) = \omega(t) - \frac{2a^2}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\alpha(t)}{\left(a^2(t-\tau)\right)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\alpha^2(t)}{4a^2(t-\tau)}\right\} \upsilon(\tau)\,d\tau. \tag{6}$$

Вводя обозначения

$$f(t) = 2a^2 q(t);$$

$$H(t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\alpha(t)+\alpha(\tau)}{\left(t-\tau\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\left(\alpha(t)+\alpha(\tau)\right)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) + \frac{\alpha(t)-\alpha(\tau)}{\left(t-\tau\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\left(\alpha(t)-\alpha(\tau)\right)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right\}, \tag{7}$$

получаем

$$\varphi(t) - \int_0^t H(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t). \tag{8}$$

Если функция $\alpha(t)$ монотонно возрастающая и $\alpha(0)=0$, то ядро $\mathrm{H}(t,\tau)$ обладает свойствами:

1) $H(t,\tau) \ge 0$ и непрерывно при $0<\tau\le t\le 1$;

2) $\lim\limits_{t\to t_0}\displaystyle\int_{t_0}^t H(t,\tau)\,d\tau = 0,\ t_0 \ge \varepsilon > 0;$

3) $\lim\limits_{t\to 0}\displaystyle\int_0^t H(t,\tau)\,d\tau = 1.$

Особенность исследуемого уравнения заключается в свойстве 3) ядра $H(t,\tau)$ и выражается в том, что соответствующее неоднородное уравнение не может быть решено методом последовательных приближений. Уравнения такого типа впервые рассмотрены в работах С.Н. Харина, в которых изучалась асимптотика интегралов типа потенциалов двойного слоя и построены приближенные решения некоторых прикладных задач [2]. Им предложен и обоснован метод, в котором решение интегрального уравнения представляется в виде асимптотического разложения по полуцелым степеням переменной t.

Интересно отметить, что к подобного рода особым интегральным уравнениям сводятся также краевые задачи для спектрально-нагруженного параболического уравнения, когда линия нагрузки движется по закону $x=\alpha(t)$ [4–7].

Цель настоящей работы — показать, что однородное уравнение, соответствующее (8), при $\alpha(t)=t,$ т.е.

$$\varphi(t)-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\left[\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}+\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\right]\varphi(\tau)\,d\tau=0, \tag{9}$$

имеет ненулевое решение. Тем самым будет показано, что однородная задача (1)–(2) также имеет нетривиальное решение.

В уравнении (9) произведем замены $t=\dfrac{1}{y}, \quad \tau=\dfrac{1}{x}.$ Тогда

$$t+\tau=\frac{x+y}{xy};\quad t-\tau=\frac{x-y}{xy};\quad \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}=\frac{(x+y)\sqrt{xy}}{(x-y)^{3/2}};$$

$$\frac{(t+\tau)^2}{t-\tau}=\frac{x-y}{xy}+\frac{4}{x-y};\quad d\tau=d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{dx}{x^2}.$$

Пределы интегрирования

$$0<\tau<t\ \Rightarrow\ 0<\frac{1}{x}<\frac{1}{y}\ \Rightarrow\ y<x<\infty.$$

После подстановки в уравнение (9) и умножения полученного равенства на $e^{\frac{1}{4a^2y}}y^{-\frac{3}{2}}$ приходим к уравнению

$$e^{\frac{1}{4a^2y}}y^{-\frac{3}{2}}\varphi\left(\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}y^{-1}\int_y^\infty\left[\frac{x+y}{(x-y)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{1}{a^2(x-y)}\right\}+\frac{1}{(x-y)^{1/2}}\right]e^{\frac{1}{4a^2x}}x^{-\frac{3}{2}}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)dx=0.$$

Введя обозначение $e^{\frac{1}{4a^2y}}y^{-\frac{3}{2}}\varphi\left(\dfrac{1}{y}\right)=\psi(y)$ и умножая на y, получим

$$y\,\psi(y)-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_y^\infty\left[\frac{x+y}{(x-y)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{1}{a^2(x-y)}\right\}+\frac{1}{(x-y)^{1/2}}\right]\psi(x)\,dx=0. \tag{10}$$

Если обозначить $L[\psi(y)]=\overline{\psi}(p)$ преобразование Лапласа функции $\psi(y)$, то можно доказать следующую теорему о свертке:

$$L\left[\int_y^\infty K(y-x)\,\psi(x)\,dx\right]=\overline{K}(-p)\,\overline{\psi}(p), \tag{11}$$

где

$$\overline{K}(-p)=\int_0^\infty K(-t)\,e^{pt}\,dt.$$

К уравнению (10) применим преобразование Лапласа. Рассмотрим отдельно каждое слагаемое.

$L[y\psi(y)]=-\dfrac{d\overline{\psi}(p)}{dp}$ верно по теореме о дифференцировании изображения Лапласа.

$$L\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_y^\infty\left(\frac{x+y}{(x-y)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{1}{a^2(x-y)}\right\}\right)\psi(x)\,dx\right]=$$
$$=L\left[\int_y^\infty\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi(x-y)}}\exp\left\{-\frac{1}{a^2(x-y)}\right\}\right)\psi(x)\,dx\right]+L\left[y\int_y^\infty\left(\frac{2}{2a\sqrt{\pi}(x-y)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{1}{a^2(x-y)}\right\}\right)\psi(x)\,dx\right]. \tag{12}$$

Из известного равенства $L\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{k^2}{4t}\right\}\right]=\frac{e^{-k\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$ и равенства (4) для первого слагаемого в (12) при $k=\frac{2}{a}$ имеем

$$L\left[\int_y^\infty\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi(x-y)}}\exp\left\{-\frac{1}{a^2(x-y)}\right\}\right)\psi(x)\,dx\right]=\frac{e^{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}}}{2a\sqrt{-p}}\overline{\psi}(p). \tag{13}$$

Из известного равенства $L\left[\frac{k}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}\exp\left\{-\frac{k^2}{4t}\right\}\right]=e^{-k\sqrt{p}}$, равенства (11) и теоремы о дифференцировании изображения Лапласа $L[y\,f(y)]=-\frac{d\,\overline{f}(p)}{d\,p}$ для второго слагаемого в (12) при $k=\frac{2}{a}$ имеем

$$L\left[y\int_y^\infty\left(\frac{2}{2a\sqrt{\pi}(x-y)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{4}{4a^2(x-y)}\right\}\right)\psi(x)\,dx\right]=-\frac{d}{d\,p}\left(e^{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}}\,\overline{\psi}(p)\right). \tag{14}$$

С учетом (13) и (14) равенство (12) примет вид

$$L\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_y^\infty\left(\frac{x+y}{(x-y)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{1}{a^2(x-y)}\right\}\right)\psi(x)\,dx\right]=\frac{e^{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}}}{2a\sqrt{-p}}\overline{\psi}(p)-\frac{d}{d\,p}\left(e^{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}}\,\overline{\psi}(p)\right).$$

Последнее слагаемое в (10): $\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_y^\infty\frac{1}{(x-y)^{1/2}}\psi(x)\,dx$ после преобразования Лапласа с учетом известного равенства $L\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right]=\frac{1}{\sqrt{p}}$ и равенства (11) примет вид

$$L\left[\int_y^\infty\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi(x-y)}}\right)\psi(x)\,dx\right]=\frac{1}{2a\sqrt{-p}}\overline{\psi}(p).$$

Итак, после применения преобразования Лапласа к уравнению (10) получим

$$-\frac{d\,\overline{\psi}(p)}{d\,p}+\frac{d}{d\,p}\left[e^{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}}\,\overline{\psi}(p)\right]-\frac{\overline{\psi}(p)}{2a\sqrt{-p}}-\frac{e^{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}}}{2a\sqrt{-p}}\overline{\psi}(p)=0,$$

или

$$\left(1-e^{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}}\right)\left(\overline{\psi}'(p)+\frac{1}{2a\sqrt{-p}}\overline{\psi}(p)\right)=0.$$

Значит, $\overline{\psi}(p)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\overline{\psi}'(p)+\frac{1}{2a\sqrt{-p}}\overline{\psi}(p)=\delta\left(p-k^2\pi^2a^2\right), \tag{15}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, а $p_k=k^2\pi^2a^2\quad(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ — корни уравнения $1-e^{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}}=0$.

Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению, (15), имеет вид $\overline{\psi}(p)=C e^{\frac{1}{a}\sqrt{-p}}$, или, переходя к оригиналам, получим, что $\psi(y)=\dfrac{C}{\pi}\exp\left\{-\dfrac{1}{a^2 y}\right\}\dfrac{1}{y}\ D_{-2}\left(\dfrac{1}{a\sqrt{2y}}\right)$, где $D_{-2}(z)$ — функция параболического цилиндра [9; 1081]. Производя обратные замены, получим, что функция $\varphi_0(t)=\exp\left\{-\dfrac{5}{4a^2}t\right\}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\ D_{-2}\left(\dfrac{\sqrt{t}}{a\sqrt{2}}\right)$ является собственной функцией особого интегрального уравнения (9), что можно проверить непосредственной подстановкой.

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0; \tag{16}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=0,\quad u(x,t)\big|_{x=t}=0 \tag{17}$$

имеет ненулевое решение. Запишем его в явном виде. Из соотношений (3) и (4), учитывая, что $\upsilon(t)=0, \alpha(t)=t$ и $\varphi(t)=C\varphi_0(t)$ имеем:

$$u(x,t)=\frac{C}{\left(2a\sqrt{\pi}\right)^2}\int_0^t\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}d\tau\int_0^\tau\frac{\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\tau_1^2}{4a^2(\tau-\tau_1)}\right\}\varphi_0(\tau_1)\,d\tau_1+$$

$$+\frac{C}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{x-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi_0(\tau)\,d\tau=C\left(I_1(x,t)+I_2(x,t)\right).$$

Поменяем порядок интегрирования в двойном интеграле

$$I_1(x,t)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi}\right)^2}\int_0^t x\,\tau_1\varphi_0(\tau_1)\,d\tau_1\int_{\tau_1}^t\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}(\tau-\tau_1)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}-\frac{\tau_1^2}{4a^2(\tau-\tau_1)}\right\}d\tau$$

и вычислим внутренний интеграл

$$I(x,t,\tau_1)=\int_{\tau_1}^t\frac{1}{\left[(t-\tau)(\tau-\tau_1)\right]^{3/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}-\frac{\tau_1^2}{4a^2(\tau-\tau_1)}\right\}d\tau.$$

Производя в нем замену $z=\sqrt{\dfrac{t-\tau}{\tau-\tau_1}}$, получим

$$I(x,t,\tau_1)=\frac{2\exp\left\{-\dfrac{x^2+\tau_1^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}}{(t-\tau_1)^2}\left[\int_0^\infty\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau_1)}\cdot\frac{1}{z^2}-\frac{\tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)}\cdot z^2\right\}dz\ +\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty\frac{1}{z^2}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau_1)}\cdot\frac{1}{z^2}-\frac{\tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)}\cdot z^2\right\}dz\ \right].$$

Используя формулы [8]:

$$\int_0^\infty\exp\left\{-a\,x^2-\frac{b}{x^2}\right\}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left\{-2\sqrt{ab}\right\};$$

$$\int_0^\infty\exp\left\{-\frac{a}{x^2}-\mu\,x^2\right\}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left\{-2\sqrt{a\mu}\right\}$$

получим

$$I(x,t,\tau_1)=\frac{2a\sqrt{\pi}}{(t-\tau_1)^{3/2}}\cdot\frac{x+\tau_1}{x\tau_1}\exp\left\{-\frac{(x+\tau_1)^2}{4a^2(t-\tau_1)}\right\}.$$

Таким образом,

$$I_1(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{x+\tau_1}{(t-\tau_1)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x+\tau_1)^2}{4a^2(t-\tau_1)}\right\}\varphi_0(\tau_1)\,d\tau_1.$$

Окончательно имеем

$$u(x,t) = C\left\{\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{x+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi_0(\tau)\,d\tau\, + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{x-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi_0(\tau)\,d\tau\right\}.$$

Это решение представимо в следующей форме:

$$u(x,t) = \frac{C}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t\left[x\cdot ch\frac{x\tau}{4a^2(t-\tau)} - \tau\cdot sh\frac{x\tau}{4a^2(t-\tau)}\right]\exp\left\{-\frac{x^2+\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi_0(\tau)\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}. \quad (18)$$

Функция $u(x,t)$, определяемая равенством (18), ограничена в области $G=\{(x;t):\ \ t>0,\ \ 0<x<t\}$, очевидно, удовлетворяет уравнению (16) и однородным граничным условиям (17), т.е. действительно является решением однородной задачи (16)–(17).

References

1 *Kim E.I.* Solution of a certain class of singular integral equations with line integrals // Rep. of Akad. Scien. USSR (N.S). — 1957. — Vol. 113. — P. 24–27.

2 *Kharin S.N.* Themal processes in electrical contacts and the associated singular integral equations: Dis. for degree of PHD doctor, IMM Akad. Scien KazSSR. — 1970. — P. 13.

3 *Tikhonov A.N., Samarskyi A.A.* Equations of mathematical physics. — Publ. 5-th. — M.: Science, 1977. — 735 p.

4 *Soldatov A.P., Ramazanov M.I., Shaldykova B.A.* About the boundary value problems for the spectrally-loaded parabolic operator. I // Bulletin of KarSU. Mathematics series. — 2011. — № 2 (62). — P. 85–92.

5 *Soldatov A.P., Ramazanov M.I., Shaldykova B.A.* About the boundary value problems for the spectrally-loaded parabolic operator. II // Bulletin of KarSU. Mathematics series. — 2011. — № 23 (62). — P. 88–95.

6 *Akhmanova D.M., Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I.* On a particular Volterra integral equation of second kind with a spectral parameter // Siberian Mathematical Journal. — 2011. — Vol. 52. — № 1. — P. 3–14.

7 *Amangalieva M.M., Ahmanova D.M., Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I.* The boundary value problems for the spectrally-loaded heat conduction operator with approaching loaded line in zero or infinity // Differential equations. — 2011. — Vol. 47. — № 2. — P. 231–243.

8 *Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* Table of Integrals, Series and Products // Phizmatgiz. — 1963. — 982 p.

М.Т.Космакова, М.Т.Мизамбаева

Туылатын облыстағы жылуөткізгіштік теңдеу үшін біртекті шеттік есеп

Жылжымалы шекаралы облыстағы жылу өткізгіштік теориясының шеттік есебі мен оған келтіруге болатын сәйкес Вольтерр ерекше интегралдық теңдеуі қарастырылады. Бұл теңдеудің ерекшелігі — біртекті емес теңдеу тізбектей жуықтау әдісі бойынша шешілмейтіндігінде болады. $\alpha(t)=t$ шекарасының жылжуының сызықтық заңына сәйкес біртекті теңдеу шешіледі. Нәтижесінде қарастырылып отырған ерекше интегралдық теңдеудің меншікті функциясын және біртекті шеттік есептің нөлдік емес шешімін аламыз.

M.T.Kosmakova, M.T.Mizambaeva

On the homogeneous boundary value problem for the heat equation in the degenerate domain

We consider the boundary problem of the theory of heat conduction in a domain with a moving boundary and the corresponding singular integral equation of Volterra, to which it is reduced. Feature of this integral equation is expressed in the fact that the inhomogeneous equation can not be solved by successive approximations. We solve the homogeneous equation corresponding to linear law of motion of the boundary $\alpha(t)=t.$ In the result we obtain an Eigen function of a singular integral equation under consideration and the nontrivial solution of the homogeneous boundary value problem.