

О КЛАССАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

Ергалиев М.¹, Токешева А.С.²

¹Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы.

²Карагандинский государственный университет им. академика Е. А. Букетова, Караганда,

E-mail: tokesheva.a@mail.ru

Рассматривается первая краевая задача теплопроводности в вырождающейся угловой области:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; 0 < x < mt, t \in (0, T), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0+} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=mt} + k\tilde{u}(t) = 0, \quad (2)$$

где

$$\tilde{u}(t) = u(x, t) \Big|_{x=mt} = u(mt, t),$$

k и m - заданы [1].

Решение уравнения теплопроводности может быть представлено в виде суммы тепловых потенциалов простого слоя [2]:

$$u(x, t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} v(\tau) d\tau + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-m\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \varphi(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где функции $v(t), \varphi(t)$ необходимо определить.

Известно, что функция определенная данным равенством удовлетворяет уравнению (1) для любых $v(t), \varphi(t)$ для которых существуют интегралы в (3). Удовлетворяя граничные условия и выполнив необходимые преобразования, краевую задачу (1)-(2) сведем к решению интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{m^2 t \tau}{a^2(t-\tau)} - \frac{m^2(t-\tau)}{4a^2}} \varphi(\tau) d\tau - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{m}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2(t-\tau)}{4a^2}} \varphi(\tau) d\tau + \\ + \frac{ka}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2(t-\tau)}{4a^2}} \left[e^{-\frac{m^2 t \tau}{a^2(t-\tau)}} + 1 \right] \varphi(\tau) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для данного псевдо-Вольтеррового интегрального уравнения второго рода строится характеристическое, решение которого найдено в явном виде.

Используя метод регуляризации решением характеристического уравнения сводим уравнение (4) к интегральному уравнению Вольтерра со слабой особенностью, которое решается методом последовательных приближений.

Показано, что поставленная однородная краевая задача имеет ненулевое решение.

Классы единственности для граничной задачи (1)-(2) определяются следующим утверждением.

Теорема. Классами единственности решения для граничной задачи (1)-(2) являются

$$L_\infty \left(G; \left[x^{1/2+\alpha} + t^{(1/2+\alpha)/2} \right]^{-1} \right), \quad \alpha > 0.$$

Список использованных источников

1. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: Ғылым, 2010. – 334 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 734 с.