порядка с вырожденным ядром. Бюллетень Института математики, Vol. 5 (1), 2022, стр.88-101.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Утебаев Даулетбай[1], **Ярлашов Ринат**[2]

[1]Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, г. Нукус, Узбекистан
[1]E-mail: dutebaev56@mail.ru
[2]Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент, Узбекистан
[2]E-mail: rinat030391@mail.ru

В области $\bar{Q}_T = \left\{(x,t) : x = (x_1, x_2, x_3) \in \bar{\Omega} = [0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1,2,3]\,, t \in [0,T]\right\}$ рассмотрена следующая нелинейная начально-краевая задача

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta_3 u - u\right) + u^3 = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \bar{\Omega}, \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, t \in (0,T], \tag{3}$$

где $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ - трехмерный оператор Лапласа, $Q_T = \Omega \times (0,T]$, $\Omega = \{0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1,2,3\}$.

Уравнение (1) описывает квазистационарные процессы в полупроводниках при наличии стационарного распределения источников тока свободных зарядов [1].

Условие (3) означает, что граница полупроводниковой среды является заземленной и идеально проводящей.

Построим подпространство $\overset{\circ}{\dot{H}}_h$,, аппроксимирующий H, гильбертово пространство со скалярным произведением (u, ϑ) нормой $\|\cdot\|$. Здесь $\overset{\circ}{\dot{H}}_h$, - пространство дискретных функции обращающихся в нуль на граничных точках. Сначала аппроксимируем уравнение (1) методом конечных разностей по пространственным переменным, в результате получаем задачу Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$D\frac{du_h}{dt} = F(u_h), \quad u_h(0) = u_{h,0}, \tag{4}$$

где $D = \sum_{m=1}^{3} \Lambda_m - E$ линейный постоянный оператор действует из $\overset{\circ}{\dot{H}}_h - > \overset{\circ}{\dot{H}}_h$

$$\Lambda_m = \frac{1}{h_m^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $D^* = D > 0,, \quad \forall t \geq 0,\ F(u_h) = -u_h^3,,\ u_h = u_h(t) \in H_h,,\ f(u_h) \in H_h,\ \Lambda_m uh = uh, x_m \bar{x}_m,\ m = 1, 2, 3,\ u_h$ - значение функции в фиксированном узле $x = (i_1 h_1, i_2 h_2, i_3 h_3)$. Разностный оператор (матрица) D аппроксимирует дифференциальный оператор $\Delta_3 u - u$ со вторым порядком, т.е. $O\left(|h|^2\right), |h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$. Кроме того, отметим, что оператор D невырождена, следовательно, существует обратный оператор D^{-1}.

Далее рассмотрим вопросы повышения аппроксимации дифференциального оператора $\Delta_3 u - u$. Для этого воспользуемся разложением ряда Тейлора, т.е. $\Lambda_m u = \Lambda_m u + \frac{h^2}{12} \Lambda_m u + O\left(h_m^4\right), \quad m = \overline{1,3}$. Следовательно, оператор $\bar{D} = \left(1 + \frac{h^2}{12}\right) \sum_{m=1}^{3} \Lambda_m - E$ аппроксимирует $\Delta_3 u - u$ четвертым порядком, т.е. $O(|h|^4)$. Тогда задача (4) имеет вид

$$\bar{D} \frac{du_h}{dt} = F\left(u_h\right), \quad uh(0) = uh, 0 \tag{5}$$

Для дискретизации задачи Коши (5) используются методы Рунге-Кутты первого (схемы Эйлера), второго и четвертого порядков, а также А-устойчивые методы Бобкова [3] различных порядков. На основе результатов работы [2] доказаны теоремы об устойчивости и точности численных алгоритмов. Приведены алгоритмы реализации схемы. На основе тестовых задач проведены численные расчеты, которые подтверждают теоретические выводы.

Список литературы

[1] Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. – М.: ФИЗМАТЛИТЬ, 2007. – 736 С.

[2] Aripov M.M., Utebaev D., Utebaev B.D., Yarlashov R.Sh. On the Stability of Nonlinear Difference Equations and Some of Their Applications // Bulletin of Karaganda University, No. 3, 2024 y., pp. 13-25.

[3] Бобков В.В. Новые А-устойчивые методы численного решения дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1978, Том 14, № 12, С. 2249– 2251.