

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Алибиев Д.Б., Кажикенова А.Ш., Кауымбек И.С., Сейтимбетова А.Б.

Карагандинский государственный университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

E-mail: dalibiev@mail.ru

В данной работе рассмотрен экономичный итерационный метод для одного класса операторных разностных уравнений. С помощью общей теории проведен анализ сходимости итерационного метода для численного решения стационарной задачи (1), (2) и (1), (3):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \nabla) \omega = v \Delta \vec{\omega} + \text{rot } \vec{f}$$

$$\Delta \varphi = \omega, u = \varphi_y, v = -\varphi_x \quad (1)$$

$$\omega|_{t=0} = u_y - v_x|_{t=0} = u_{0x} - v_{0y} = \omega_0(x, y)$$

$$\varphi/\gamma = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\gamma} = 0 \quad (2)$$

где φ - функция тока, ω - вихрь скоростей.

Если область ω - это многосвязные области $\gamma_i = \partial \omega_i$, непересекающие границы ω , то система уравнений (1) решается с условиями $\omega|_{t=0} = u_0(x)$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\partial \omega} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0, \oint_{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial n} \partial l = 0. \quad (3)$$

где n - нормаль границы $\partial \omega$, τ - касательный вектор.

Так же рассматривается система операторно-разностных уравнений вида

$$I(\omega, \varphi) + A\omega + B\varphi = f \quad (4)$$

$$A\varphi = \omega.$$

где операторы A, B и нелинейная форма $I(\omega, \varphi)$ считаются заданными на всем пространстве H .

Вычисления проведены в предположении, что система уравнений [1]

$$\frac{dv}{dt} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = v \Delta \vec{v} \rightarrow \nabla p + \vec{f}$$

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

с начальными граничными условиями

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0(0)$$

$$\vec{v}|_{\partial \omega} = \vec{v}_0(0)$$

определяется при выполнении следующих условий:

а) A - самосопряженный оператор, $A: H \rightarrow H$, и существуют числа $\beta_1 > 0, \beta_2$ такие, что, $\beta_1 E \leq A \leq \beta_2 E$, т.е. $A = A^*$, $\beta_1 \|x\|^2 \leq (Ax, x) \leq \beta_2 \|x\|^2$ для любого $x \in H$.

б) Оператор B - линейный и неотрицательный, т.е. $(Bx, x) \geq 0$, для любого $x \in H$.

в) нелинейная форма $I(\omega, \varphi)$ является билинейной, т.е. по каждому аргументу (ω, φ) является линейным и удовлетворяет тождеству $(I(\omega, \varphi), \varphi) = 0$, которое справедливо для любых ω и φ из H .

Здесь $\vec{v} = (u; v; \omega)$ - поле скоростей, p - поле давления, \vec{f} - поле массовой силы, v - коэффициент вязкостей. Кроме того, относительно билинейной формы $I(\omega, \varphi)$, предположили, что справедливо неравенство

$$|I(\omega, \varphi), v| \leq C \|\varphi\|_A * \|\omega\| * \|Av\|$$

где H_A - пространство, порожденное оператором A .

Для численной реализации решения системы уравнений (4) был рассмотрен следующий итерационный процесс:

$$\frac{\omega^{n+1/2} - \omega^n}{\tau} + I(\omega^n, \varphi^{n+1/2}) + A\omega^n + B\varphi^{n+1/2} = f.$$

$$A\varphi^{n+1/2} = \omega^{n+1/2}$$

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^{n+1/2}}{\tau} + A(\omega^{n+1} - \omega^n) = 0$$

$$A\varphi^{n+1} = \omega^{n+1}.$$

Список использованных источников

1. Алибиев Д.Б., Данаев Н.Т., Смагулов Ш. Об итерационном методе решения одного класса операторно-разностных уравнений. - М.1993. - 30с. -Деп. КазНИИ НКИ. рег. №4323 - Ка93. 24.06.93.