15. *Akysh A.Sh.* New properties of Navier-Stokes equations // Bulletin KarSU. Ser. Mathematic. — 2010. — № 4 (60). — P. 16–24.
16. *Akysh A.Sh.* About Lemm of theory of the Navier-Stokes Equations // Bulletin KarSU. Ser. Mathematic. — 2011. — № 3 (63). — P. 3–7.
17. *Akysh A.Sh.* On a maximum principle for Nabier-Stokes equations // Izvestia NAN RK. — 2011. — № 3. — P. 69–72.
18. *Akysh A.Sh.* The maximum principle of the Navier-Stokes equation // Book of abstracts: IV congress of the turkic World mathematical society (Baku, Azerbaijan, 1–3, July, 2011). — 151 p.
19. *Weyl H.* The method of orthogonal projection in potential theory // Duke Math. J. 7 (1940). — P. 411–444.
20. *Mikhailov V.P.* Partial Differential Equations in derivatives. — M.: Nauka, 1983. — 421 p.
21. *Kochin N.E.* Vector Calculus and the beginning of the tensor calculus. — M.: Nauka, 1965. — 426 p.
22. *Ilyin V.A., Sadovnichii V.A., Sendov Bl.H.* Mathematical analysis. — M.: Nauka, 1979. — 719 p.
23. *Vladimirov V.S.* The equations of mathematical physics. — M.: Nauka, 1971. — 435 p.
24. *Akysh A.Sh.* The ℓ_p stability of some difference schemes for one system of nonlinear parabolic equations // Siberian J. of Numer. Mathematics. — 2005. — Vol. 8. — № 4. — P. 273–280.

УДК 519.6:551.46

Некоторые особенности постановки задач течения жидкости с поверхностными гравитационными волнами

Some features of formulation of the problem of fluid flow with surface gravity waves

Алибиев Д.Б., Кушекова Г.Ж., Кажикенова А.Ш.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: dalibiev@mail.ru)

Мақалада сұйықтың ағынының жоғарғы толқындары есебінің кейбір ерекшеліктері қарастырылады. Осындай қойылымдағы есептер үшін сұйықтың ағынының Ω облысы зерттеледі. Сәйкес формулалармен анықталған тәуелді айнымалылар, векторлық потенциал, иірім векторы енгізілген. Есептің шешімін және оның теңдеуінің орнықтылығын анықтау үшін есептеу математикасы мен механиканың белгілі математикалық түрлендірулері қолданылған.

This work discusses some features of formulation of the problem of fluid flow with surface gravity waves. In this formulation the fluid domain are considered. A new dependent variable, the vector potential, the vector of the vortex, which are determined by the corresponding formulas are introduced. Known mathematical calculations on computational mathematics and mechanics are applied to obtain the stability and uniqueness of solutions.

1. Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости в ограниченном бассейне конечной глубины. Введем декартову систему координат так, чтобы ее оси Ox_1, Ox_2 лежали на невозмущенной свободной поверхности, а ось Ox_3 была направлена вертикально вверх. В этих координатах течение жидкости описывается следующей системой уравнений [1]:

$$di\upsilon\ u = 0,\ u_t + \left(u\cdot\nabla\right)u + \frac{1}{\rho}\nabla p = g, \tag{1}$$

где u — вектор скорости с компонентами u_1, u_2, u_3 в направлении осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 соответственно; $\rho = const$ — плотность; p — давление; $g = \left(0, 0, -g\right), g = const$ — ускорение свободного падения; t — время,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right),\ di\upsilon\ u = \nabla u.$$

Уравнения (1) рассматриваются в односвязной области $\Omega(t)$, ограниченной боковыми стенками, дном бассейна, заданным функцией $x_3 = -h\left(x_1, x_2\right)$, и свободной поверхностью, описываемой в параметрическом виде

$$x = f\left(\xi_1, \xi_2, t\right), \tag{2}$$

где $f=(f_1,f_2,f_3)$ — искомая вектор-функция; $x=(x_1,x_2,x_3)$. В этой работе рассматриваются необрушивающиеся волны, поэтому всюду, где не оговорено иное, вместо (2) будет использоваться представление свободной поверхности в виде однозначной функции независимых переменных x_1, x_2:

$$x_3=\eta(x_1,x_2,t). \tag{3}$$

Свободную поверхность жидкости обозначим через Γ_f, дно бассейна и его боковые стенки — через Γ_b, при этом $\Gamma_b=\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2$, где Γ_0 — непроницаемая часть границы; Γ_1 — участки втекания жидкости (входы); Γ_2 — участки вытекания (выходы из Ω). Участки Γ_1 и Γ_2 являются неподвижными, а непроницаемые стенки могут быть как подвижными, так и неподвижными.

Особенность этой работы состоит лишь в том, что основные виды краевых условий перенесены к решению тестовых и модельных задач. Здесь предполагается со свободной границей. Таким образом, Γ_f имеет пересечения лишь с непроницаемой стенкой Γ_0. Другие случаи взаимного расположения участков Γ_f и Γ_1, Γ_f и Γ_2 будут рассматриваться в дальнейшем при решении конкретных задач.

Итак, в качестве условий на границе Γ области Ω задаются:

– условие непротекания через Γ_0:

$$u\cdot n=u_w\cdot n,\ x\in\Gamma_0(t),\ t\ge 0; \tag{4}$$

– вектор скорости u на входе:

$$u=\vec{v}_1,\ x\in\Gamma_1,\ t\ge 0; \tag{5}$$

– нормальная составляющая вектора скорости на выходе:

$$u\cdot n=v_2\ \ x\in\Gamma_2,\ t\ge 0; \tag{6}$$

– кинематическое условие на Γ_f:

$$\eta_t+u_1\eta_{x_1}+u_2\eta_{x_2}-u_3=0,\ x\in\Gamma_f(t),\ t\ge 0; \tag{7}$$

– динамическое условие на Γ_f:

$$p=p_{атм}=const,\ x\in\Gamma_f(t),\ t\ge 0. \tag{8}$$

Здесь u_w — скорость подвижных частей Γ_0; n — единичный вектор внешней нормали к Γ; $p_{атм}$ — заданное атмосферное давление; $\vec{v}_1$ и v_2 — заданные функции.

При $t=0$ задаются начальные условия:

$$\eta(x_1,x_2,0)=\eta_0(x_1,x_2); \tag{9}$$

$$u(x,0)=u_0(x), x\in\Omega(0), \tag{10}$$

при этом предполагается, что начальное поле скоростей является соленоидальным:

$$di\upsilon\ u_0=0, \tag{11}$$

и вектор-функция u_0 согласно условию при $t=0$ с граничными условиями (14–16).

Необходимым условием разрешимости поставленной задачи является выполнение закона баланса массы, устанавливающего некоторую дополнительную связь между функциями $\eta,\vec{v}_1,v_2,u_w$:

$$mes\Omega(t)=mes\Omega(0)-\int_0^t\int_{\Gamma_1}v(x,t)\,d\Gamma_1dt-\int_0^t\int_{\Gamma_2}v(x,t)\,d\Gamma_2dt, \tag{12}$$

где $mes\Omega$ — объем области Ω;

$$v(x,t)=\begin{cases}u_w\cdot n, x\in\Gamma_0;\\ \vec{v}_1\cdot n, x\in\Gamma_1;\\ v_2, x\in\Gamma_2.\end{cases} \tag{13}$$

2. Введем новые зависимые переменные [2]: векторный потенциал $\vec{\psi}=(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$ и вектор вихря $\vec{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, которые определяются по формулам

$$\vec{\omega}=rotu; \tag{14}$$

$$u=rot\vec{\psi}. \tag{15}$$

Покомпонентно эти соотношения можно записать как

$$\omega_1 = -\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \omega_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \omega_3 = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}; \qquad (16)$$

$$u_1 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2}, u_2 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}, u_3 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}. \qquad (17)$$

Применяя операцию rot к обоим частям уравнения движения (1), получим следующую систему уравнений для новых зависимых переменных $\vec{\psi}, \vec{\omega}$:

$$\nabla(di\upsilon\ \vec{\psi}) - \Delta\vec{\psi} = \vec{\omega}; \qquad (18)$$

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \left(rot\vec{\psi}\cdot\nabla\right)\vec{\omega} - \Delta\vec{\psi}\left(\vec{\omega}\cdot\nabla\right)rot\vec{\psi} = 0. \qquad (19)$$

Гладкую вектор-функцию $\vec{\psi}$ можно представить в виде суммы соленоидальной $\vec{\psi}_1$ и градиентной $\vec{\psi}_2$ частей [3]:

$$\vec{\psi} = \vec{\psi}_1 + \vec{\psi}_2,\ di\upsilon\ \vec{\psi}_1 = 0,\ \vec{\psi}_2 = \nabla\varphi,$$

где φ — некоторая скалярная функция. Тогда левая часть уравнения (18) примет вид:

$$\nabla(di\upsilon\ \vec{\psi}) - \Delta\vec{\varphi} = \nabla(di\upsilon\ \vec{\psi}_2) - \Delta\vec{\psi}_1 - \Delta\left(\nabla\varphi\right) = \Delta\left(\nabla\varphi\right) - \Delta\vec{\psi}_1 - \Delta\left(\nabla\varphi\right) = -\Delta\vec{\psi}_1.$$

Кроме того,

$$u = rot\vec{\psi} = rot(\vec{\psi}_1 + \nabla\varphi) = rot\vec{\psi}_1.$$

Таким образом, вместо определения вектора $\vec{\psi}$ можно поставить задачу на нахождение лишь его соленоидальной части, для обозначения которой будем использовать тот же символ $\vec{\psi}$. Следовательно, определяющее уравнение относительно искомых функций $\vec{\psi}$ и $\vec{\omega}$ выглядит так:

$$\Delta\vec{\psi} = -\vec{\omega}; \qquad (20)$$

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \left(rot\vec{\psi}\cdot\nabla\right)\vec{\omega} - \left(\vec{\omega}\cdot\nabla\right)rot\vec{\psi} = 0; \qquad (21)$$

$$di\upsilon\ \vec{\psi} = 0. \qquad (22)$$

Отметим, что в силу (22) правая часть уравнения (20) должна удовлетворять уравнению

$$di\upsilon\ \vec{\omega} = 0. \qquad (23)$$

Покомпонентно уравнения (20)–(22) можно записать как

$$\Delta\psi_\alpha = -\omega_\alpha; \qquad (24)$$

$$\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial t} + u_1\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial x_3} - \omega_1\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_1} - \omega_2\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_2} - \omega_3\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_3} = 0; \qquad (25)$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_3} = 0, \qquad (26)$$

где $u_\alpha\left(\alpha = 1,2,3\right)$ выражаются через компоненты вектора $\vec{\psi}$ по формулам (17).

Уравнения (24)–(26) решаются в области $\Omega(t)$ при условиях

$$rot\vec{\psi}\cdot n = v,\ x \in \Gamma_0 \cup \Gamma_2,\ t \ge 0; \qquad (27)$$

$$rot\vec{\psi} = v_1,\ x \in \Gamma_1,\ t \ge 0, \qquad (28)$$

где v определяется по формуле (13). На границе Γ_f ставится условие (7), а динамическое условие (8) заменяется на условие для производной $\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t}$. Для его получения запишем уравнение движения (1) в форме Громеки-Лэмба

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla|u|^2 - u\times\vec{\omega} + \frac{1}{\rho}\nabla p = g. \qquad (29)$$

Пусть $\vec{\tau}_1$ — вектор, касательный к Γ_f, тогда вектор $\vec{\tau}_2 = n\times\vec{\tau}_1$ также может быть касательным к Γ_f плоскости. Умножим уравнение (29) скалярно на вектор $\vec{\tau}_2$:

$$rot\vec{\psi}_t\cdot\vec{\tau}_2 + \nabla\frac{|u|^2}{2}\cdot\vec{\tau}_2 - \left[rot\vec{\psi}\times\vec{\omega}\right]\cdot\vec{\tau}_2 + \frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\vec{\tau}_2 = g\cdot\vec{\tau}_2.$$

Из условия (8) следует $\nabla p \cdot \vec{\tau}_1 = 0$, поэтому

$$rot\vec{\psi}_t \cdot \vec{\tau}_1 = r_2, \tag{30}$$

где

$$\Gamma_2 = \left(g - \nabla \frac{|u|^2}{2} + rot\vec{\psi} \times \vec{\omega} \right) \cdot \vec{\tau}_1. \tag{31}$$

В силу равенства

$$\left[a \times b\right] \cdot c = -\left[c \times b\right] \cdot a, \tag{32}$$

справедливого для произвольных векторов $a, b, c,$ получим

$$rot\vec{\psi}_t \cdot \vec{\tau}_2 = rot\vec{\psi}_t \cdot \left[n \times \vec{\tau}_1\right] = -n \cdot \left[rot\vec{\psi}_t \times \vec{\tau}_1\right].$$

Таким образом, вместо (8) будем иметь следующее граничное условие:

$$n \cdot \left[rot\vec{\psi}_t \times \vec{\tau}_1\right] = -r_2. \tag{33}$$

Начальные условия заключаются в задании формы свободной поверхности (9), векторного потенциала

$$\vec{\psi}\left(x, 0\right) = \vec{\psi}_0\left(x\right), x \in \Omega\left(0\right) \tag{34}$$

и вектора вихря

$$\vec{\omega}\left(x, 0\right) = \vec{\omega}_0\left(x\right), x \in \Omega\left(0\right), \tag{35}$$

где

$$\vec{\omega}_0 = rotu_0; \tag{36}$$

$$\Delta\vec{\psi}_0 = -\vec{\omega}_0;\ di\upsilon\ \vec{\psi}_0 = 0. \tag{37}$$

А вектор u_0 взят из начального условия (10), (11).

Уравнения (20–22) не содержат давления. Они определяются отдельно от величин $\vec{\psi}$ и $\vec{\omega}$ из уравнения

$$\Delta p = \rho div\left(-\nabla \frac{|u|^2}{2} + u \times \vec{\omega} \right), \tag{38}$$

которое получается после применения к уравнению (29) оператора div.

Другой путь определения давления заключается в использовании уравнения Громеки-Лэмба (29). Теперь перепишем его в виде

$$\nabla p = r_0 \tag{39}$$

и положим

$$p\left(M\right) = p_{атм} + \int\limits_{\gamma\left(M_0, M\right)} r_i dx_i, \tag{40}$$

где $r = \rho\left(g - \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \frac{|u|^2}{2} + u \times \vec{\omega} \right)$; $r_i\left(i = 1, 2, 3\right)$ — компоненты вектора r; M_0 — некоторая точка свободной границы; M — точка замыкания области течения $\vec{\Omega}\left(t\right)$; $\gamma\left(M_0, M\right)$ — произвольная гладкая кривая, соединяющая точки M_0 и M. Для того чтобы значение $p(M)$ не зависело от пути интегрирования, достаточно [4], чтобы для любой замкнутой кривой C имело место равенство

$$\oint r_i dx_i = 0. \tag{41}$$

Это проверим, предполагая, что уравнения (20–22) выполняются вплоть до границы. По теории Стокса [5] имеем

$$\oint r_i dx_i = \int\limits_{S_c} rot\ r \cdot nds, \tag{42}$$

где S_c — поверхность с краем C. C, с другой стороны,

$$rotr = -\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + rot\left[u \times \vec{\omega}\right].$$

Следовательно, если вектор-функции $\vec{\psi}, \vec{\omega}$ удовлетворяют уравнению (21), то

$$rot\ r = 0 \tag{43}$$

и интеграл в левой части равенства (42) равен нулю.

При численном решении задачи расчет давления по формуле (40) даст существенный выигрыш в машинном времени по сравнению с вычислением p из уравнения Пуассона (38).

References

1. *Ovsyannikov L.V., Makarenko N.I., Nalimov V.I.* Nonlinear problems of the theory of surface and internal waves. — Novosibirsk: Nauka, 1985. — 318 p.
2. *Kogin N.E., Kibel M.A., Rose N.V.* Theoretical Hydromechanics. 41. — M.: Fizmatgiz, 1963. — 583 p.
3. *Ladyzhenskaya O.A.* The mathematical theory of incompressible fluid viscous. — M.: Nauka, 1970. — 228 p.
4. *Fikhtengol'ts G.M.* A course in differential and integral calculus. — Vol. 3. — M.: Nauka, 1969. — 656 p.
5. *Sedov L.I.* Continuum Mechanics. — T. 1. — M.: Nauka, 1973. — 536 p.

УДК 517.51

Об ограниченности одного класса интегральных операторов с переменными пределами интегрирования

On boundedness of a class of integral operators with variable limits of integration

Арендаренко Л.С.

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (E-mail: arendarenko_l@mail.ru)

Мақалада $K(x,s)$ теріс емес үздіксіз ядросымен $\mathrm{K}f(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,s) f(s) ds, \ \ x \in (a,b),$ түріндегі интегралдау шектері айнымалы болатын интегралдық операторлар қарастырылады. Автормен осы оператордың $L_{p,v}(a,b)$ Лебег салмақтық кеңістігінен p және q интегралдау параметрлері $1 < q < p < \infty$ қатынасын қанағаттандырған жағдай үшін $L_{q,w}(a,b)$ Лебег салмақтың кеңістігіне шенелгендік критерийі алынды. Қарастырылатын оператор ядросы, Ойнаровтың жетілдірілген шартын қанағаттандыратын ядролар класына қарағанда, кеңірек класта жатыр.

This paper deals with integral operator with variable limits of integration, which is defined by the formula: $\mathrm{K}f(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,s) f(s) ds, \ \ x \in (a,b).$ Here the kernel $K(x,s)$ is non-negative and continuous function. The author derived a new criterion for the operator to be bounded from weighed Lebesgue space $L_{p,v}(a,b)$ to weighed Lebesgue space $L_{q,w}(a,b)$ in case the parameters p and q satisfy the condition $1 < q < p < \infty.$ The kernel $K(x,s)$ of the operator considered is satisfy the condition which is more general that the modified Oinarov condition.

Мы рассматриваем задачу об ограниченности интегрального оператора с переменными пределами интегрирования

$$\mathrm{K}f(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,s) f(s) ds, \ x \in (a,b) \tag{1}$$

при некоторых ограничениях на ядро. Здесь $K(x,s)$ — неотрицательное непрерывное по совокупности переменных ядро, а пределы интегрирования $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ удовлетворяют следующим условиям: