

$$(L_\sigma - \lambda I)^{-1} f(x) = \int_0^b G_\sigma(x, t, \lambda) f(t) dt$$

и его ядра $G_\sigma(x, t, \lambda)$ на окружностях $|\lambda| = R_k$, которые относят от спектра оператора L_σ на расстояния не меньше δ , где $\delta > 0$. Имеет место оценка

$$|G(x, t, \lambda)| \leq \frac{M}{|\lambda|^{\frac{n-1}{n}}}$$

Здесь M не зависит от x, t, λ . Из полученной оценки ядра интегрального оператора стандартным образом следуют теоремы о разложении, которые приведены в книге [1; 97–98]. Отметим, что при изложении результатов данной статьи существенно было влияние работы А.А. Шкаликова [3].

References

1. *Naimark M.A.* Linear differential operators. — М.: Nauka, 1969. — 528 p.
2. *Otelbayev M.O., Shynybekov A.N.* Correct problems of the type Bitsadze-Samara // Dokl. AN SSSR — 1982. — Т. 265. — № 4. — P. 815–819.
3. *Shkalikov A.A.* On the basis of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions // Vestn. MGU. Ser. Matem., mehan. — 1982. — № 6. — P. 12–21.

УДК 517.956.2

Задача типа Самарского-Бицадзе для одного класса эллиптических систем второго порядка на плоскости с полярной особенностью

The problem type Samarskyi-Bitsadze for one class of elliptic systems of the second order on the plane with polar feature

Сарсенбаева М.С.

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (e-mail: sarmairasar@mail.ru)

Мақалада полярлық ерекшелігі бар жазықтықтың шексіз бұрыштық облысында берілген екінші ретті эллиптикалық жүйелердің бір класы үшін Самарский-Бицадзе типті есебі қарастырылған. Дәрежелік қатар түрінде берілген үзіліссіз шешімдердің айқын түрде бір көпбейнесі алынған. Сол үзіліссіз шешімдердің көпбейнесінің көмегімен жазықтықтың шексіз бұрыштық облысында екінші ретті эллиптикалық жүйе үшін Самарский-Бицадзе есебі шешілген. Алынған нәтижелер тегіс он қисықты беттердің шексіз аз иілу теориясында қолданылуы мүмкін.

In this paper the problem of type Samarskyi-Bitsadze for one class of elliptic system of the second order with polar feature on a plane of infinitely angular area is solved. The kind of one variety continuous the decision which are given sedate numbers is received in obvious. By means of this variety of continuous decisions the problem of type Samarskyi-Bitsadze for elliptic system of the second order on a plane of infinitely angular area is solved. The received results can be used in the theory of infinitesimal bends for surfaces with smooth positive curvature with a flattening line.

Пусть $0 < \varphi_0 \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq \varphi_0$ и $G = \{z = re^{i\varphi} : 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0\}$.

Рассмотрим в G уравнение

$$V_{\bar{z}\bar{z}} + \frac{a(\varphi)}{2r} V_z + \frac{b(\varphi)}{2r} V_{\bar{z}} + \frac{c(\varphi)}{4r^2} V - \frac{d(\varphi)}{4r^{2-\alpha} (y - k_1 x)^\alpha} \bar{V} = \frac{f(\varphi) r^{\nu-2+\alpha}}{4(y - k_2 x)^\alpha}, \quad (1)$$

где $a(\varphi), b(\varphi), c(\varphi), d(\varphi), f(\varphi) \in C[0, \varphi_1]$, $\nu > 2$ — действительное число, $k_1 = tg \varphi_1, k_2 = tg \varphi_2$.

Уравнение (1) при $\alpha = 0$ рассмотрено в [1], где решена задача типа Дирихле для уравнения (1). При $\alpha \neq 0$ уравнение (1) еще не исследовано.

Уравнение (1) записываем в полярной системе координат [1]:

$$\begin{aligned} V_{rr} + \frac{1}{r}V_r + \frac{1}{r^2}V_{\varphi\varphi} + \frac{e^{-i\varphi}a(\varphi)}{r}\left(V_r - \frac{i}{r}V_\varphi\right) + \frac{e^{i\varphi}b(\varphi)}{r}\left(V_r + \frac{i}{r}V_\varphi\right) + \frac{c(\varphi)}{r^2}V = \\ = \frac{d(\varphi)}{r^2(\cos\varphi - k_1\sin\varphi)^\alpha} \bar{V} + \frac{f(\varphi)r^{\nu-2}}{(\cos\varphi - k_2\sin\varphi)^\alpha}. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $1 < p < \frac{2}{2-\nu}$, если $\nu < 2$, и $p > 1$, если $\nu \geq 2$. Решая уравнение (2) в классе

$$W_p^2(G) \cap C(G) \quad (3)$$

методом разделения переменных, можно получить представление решения:

$$V(r, \varphi) = r^\nu \psi(\varphi), \quad (4)$$

где $\psi(\varphi)$ — новая неизвестная функция из $C^2[0, \varphi_1]$, удовлетворяющая уравнению

$$\psi'' + iA(\varphi)\psi' + B_\nu(\varphi)\psi = d_1(\varphi)\bar{\psi} + f_1(\varphi). \quad (5)$$

Здесь $A(\varphi) = e^{i\varphi}b(\varphi) - e^{-i\varphi}a(\varphi)$, $B_\nu(\varphi) = c(\varphi) + \nu^2 + \nu(e^{-i\varphi}a(\varphi) + e^{i\varphi}b(\varphi))$,

$$d_1(\varphi) = \frac{d(\varphi)}{(\cos\varphi - k_1\sin\varphi)^\alpha}, \quad f_1(\varphi) = \frac{f(\varphi)}{(\cos\varphi - k_1\sin\varphi)^\alpha}.$$

Пусть $\psi = \psi_{\nu,1}(\varphi)$ и $\psi = \psi_{\nu,2}(\varphi)$ — фундаментальная система решений из класса $C^2[0, \varphi_1]$ уравнения

$$\psi'' + iA(\varphi)\psi' + B_\nu(\varphi)\psi = 0. \quad (6)$$

Так как $A(\varphi), B_\nu(\varphi) \in C[0, \varphi_1]$, то такая фундаментальная система решений существует. Тогда методом вариации произвольных постоянных уравнение (5) приводим к следующему интегральному уравнению

$$\psi_\nu(\varphi) = (B_\nu \psi_\nu)(\varphi) + F_{\nu,1}(\varphi) + c_1 \psi_{\nu,1}(\varphi) + c_2 \psi_{\nu,2}(\varphi), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} F_{\nu,1}(\varphi) &= \int_0^\varphi \frac{\psi_{\nu,1}(\gamma)\psi_{\nu,2}(\gamma) - \psi_{\nu,2}(\gamma)\psi_{\nu,1}(\gamma)}{\psi_{\nu,1}(\gamma)\psi'_{\nu,2}(\gamma) - \psi_{\nu,2}(\gamma)\psi'_{\nu,1}(\gamma)} f(\gamma) d\gamma, \\ (B_\nu f)(\varphi) &= \int_0^\varphi b_\nu(\varphi, \gamma) \bar{f}(\gamma) d\gamma, \end{aligned}$$

$$b_\nu(\varphi, \gamma) = d_1(\gamma) \frac{\psi_{\nu,1}(\gamma)\psi_{\nu,2}(\gamma) - \psi_{\nu,2}(\gamma)\psi_{\nu,1}(\gamma)}{\psi_{\nu,1}(\gamma)\psi'_{\nu,2}(\gamma) - \psi_{\nu,2}(\gamma)\psi'_{\nu,1}(\gamma)}, \quad \Delta(\gamma) = \psi_{\nu,1}(\gamma)\psi'_{\nu,2}(\gamma) - \psi_{\nu,2}(\gamma)\psi'_{\nu,1}(\gamma),$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные. Так как $\Delta(\gamma) \neq 0$ как Вронскиан фундаментальной системы решений и $0 < \alpha < 1$, то $F_{\nu,1}(\varphi), (B_\nu f)(\varphi) \in C[0, \varphi_1]$.

Для решения уравнения (7) используем композиции оператора $(B_\nu f)(\varphi)$, определяемые по формуле

$$(B_\nu^k f)(\varphi) = (B_\nu(B_\nu^{k-1}\psi))(\varphi), \quad (k = \overline{1, \infty}).$$

При этом считаем, что $(B_\nu^0\psi)(\varphi) = \psi(\varphi)$, $(B_\nu^1\psi)(\varphi) = (B_\nu\psi)(\varphi)$. Из определения B_ν следует

$$(B_\nu(c\psi))(\varphi) = \bar{c}(B_\nu\psi)(\varphi),$$

где c — комплексное число.

Если действуем оператором $(B_\nu\psi)(\varphi)$ к обеим частям уравнения (7), то получим:

$$(B_\nu\psi_\nu)(\varphi) = (B_\nu^2\psi_\nu)(\varphi) + (B_\nu F_{\nu,1})(\varphi) + \bar{c}_1(B_\nu\psi_{\nu,1})(\varphi) + \bar{c}_2(B_\nu\psi_{\nu,2})(\varphi). \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует:

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) = & (B_v^2 \psi_v)(\varphi) + (B_v F_{v,1})(\varphi) + F_{v,1}(\varphi) + \\ & + c_1 \psi_{v,1}(\varphi) + c_2 \psi_{v,2}(\varphi) + \overline{c_1} (B_v \psi_{v,1})(\varphi) + \overline{c_2} (B_v \psi_{v,2})(\varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

Если снова действуем оператором $(B\psi)(\varphi)$ к обеим частям уравнения (9), то имеем

$$\begin{aligned} (B\psi)(\varphi) = & (B_v^3 \psi_v)(\varphi) + (B_v^2 F_{v,1})(\varphi) + (B_v F_{v,1})(\varphi) + \\ & + \overline{c_1} (B_v \psi_{v,1})(\varphi) + \overline{c_2} (B_v \psi_{v,2})(\varphi) + c_1 (B_v^2 \psi_{v,1})(\varphi) + c_2 (B_v^2 \psi_{v,2})(\varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

Из (7) и (10) вытекает:

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) = & (B_v^3 \psi_v)(\varphi) + (B_v^2 F_{v,1})(\varphi) + (B_v F_{v,1})(\varphi) + F_{v,1}(\varphi) + \overline{c_1} (B_v \psi_{v,1})(\varphi) + \overline{c_2} (B_v \psi_{v,2})(\varphi) + \\ & + c_1 ((B_v^2 \psi_{v,1})(\varphi) + \psi_{v,1}(\varphi)) + c_2 ((B_v^2 \psi_{v,2})(\varphi) + \psi_{v,2}(\varphi)). \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс $2n-1$ раз, получим следующее представление для решения уравнения (5):

$$\begin{aligned} \psi_v(\varphi) = & (B_v^{2n} \psi_v)(\varphi) + \sum_{k=0}^{2n-1} (B_v^k F_{v,1})(\varphi) + \overline{c_1} \sum_{k=1}^n (B_v^{2k-1} \psi_{v,1})(\varphi) + \overline{c_2} \sum_{k=1}^n (B_v^{2k-1} \psi_{v,2})(\varphi) + \\ & + c_1 \sum_{k=0}^{n-1} (B_v^{2k} \psi_{v,1})(\varphi) + c_2 \sum_{k=0}^{n-1} (B_v^{2k} \psi_{v,2})(\varphi). \end{aligned} \quad (11)$$

Для композиции оператора $(B_v f)(\varphi)$ имеют место следующие легко проверяемые неравенства:

$$|(B_v^k f)(\varphi)| \leq |b|_1^k \cdot |f|_0 \cdot \frac{\varphi^k}{k!}, \quad (k = \overline{1, \infty}). \quad (12)$$

Здесь $|b|_1 = \max_{0 \leq \varphi, \gamma \leq \varphi_1} |b(\varphi, \gamma)|$, $|f|_0 = \max_{0 \leq \varphi \leq \varphi_1} |f(\varphi)|$.

Если перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, то в силу (12) в представлении (11) получим

$$\psi_v(\varphi) = \overline{c_1} P_{v,1}(\varphi) + \overline{c_2} Q_{v,1}(\varphi) + c_1 P_{v,2}(\varphi) + c_2 Q_{v,2}(\varphi) + F_v(\varphi), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} P_{v,1}(\varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} (B^{2k-1} \psi_{v,1})(\varphi), \quad Q_{v,1}(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (B^{2k-1} \psi_{v,2})(\varphi), \\ P_{v,2}(\varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} (B^{2k} \psi_{v,1})(\varphi), \quad Q_{v,2}(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (B^{2k} \psi_{v,2})(\varphi), \quad F_v(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (B^k F_{v,1})(\varphi). \end{aligned}$$

Легко видеть, что функции $P_{v,1}(\varphi)$, $P_{v,2}(\varphi)$, $Q_{v,1}(\varphi)$, $Q_{v,2}(\varphi)$ и $F_v(\varphi)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} P_{v,1}(\varphi) &= \int_0^{\varphi} \overline{b_v(\varphi, \gamma)} P_{v,2}(\gamma) d\gamma, \quad P_{v,2}(\varphi) = \psi_{v,1}(\varphi) + \int_0^{\varphi} b_v(\varphi, \gamma) \overline{P_{v,1}(\gamma)} d\gamma, \\ Q_{v,1}(\varphi) &= \int_0^{\varphi} b_v(\varphi, \gamma) \overline{Q_{v,2}(\gamma)} d\gamma, \quad Q_{v,2}(\varphi) = \psi_{v,2}(\varphi) + \int_0^{\varphi} \overline{b_v(\varphi, \gamma)} Q_{v,1}(\gamma) d\gamma, \\ F_v(\varphi) &= F_{v,1}(\varphi) + \int_0^{\varphi} b_v(\varphi, \gamma) \overline{F_{v,1}(\gamma)} d\gamma. \end{aligned}$$

Используя неравенство (12), мы получим следующие полезные оценки:

$$\begin{aligned} |P_{v,1}(\varphi)| &\leq |\psi_{v,1}|_0 \cdot sh(|b|_1 \cdot \varphi), \quad |P_{v,2}(\varphi)| \leq |\psi_{v,1}|_0 \cdot ch(|b|_1 \cdot \varphi), \\ |Q_{v,1}(\varphi)| &\leq |\psi_{v,2}|_0 \cdot sh(|b|_1 \cdot \varphi), \quad |Q_{v,2}(\varphi)| \leq |\psi_{v,2}|_0 \cdot ch(|b|_1 \cdot \varphi), \quad |F_v(\varphi)| \leq |F_{v,1}|_0 \cdot \exp(|b|_1 \cdot \varphi). \end{aligned}$$

С помощью этих оценок легко можно показать, что функция $\psi_v(\varphi)$, заданная по формуле (13), является решением уравнения (5) из класса $C^2[0, \varphi_1]$. Из (13) и (4) получим:

$$V_v(r, \varphi) = r^v \left(\overline{c_1} P_{v,1}(\varphi) + \overline{c_2} Q_{v,1}(\varphi) + c_1 P_{v,2}(\varphi) + c_2 Q_{v,2}(\varphi) + F_v(\varphi) \right). \quad (14)$$

Следовательно, функция $V_v(r, \varphi)$, заданная по формуле (14), является решением уравнения (1) из класса (3). Таким образом, имеет место

Теорема 1. Уравнение (1) разрешимо в классе (3). Многообразие решений из класса (3) уравнения (1) может быть найдено по формуле (14).

Рассмотрим задачу типа Самарского-Бицадзе для уравнения (1).

Задача $S - B$. Требуется найти решение уравнения (1) из класса (3), удовлетворяющее условиям:

$$|V(r, \varphi)| = O(r^\nu), \quad r \rightarrow \infty, \quad \nu > 0, \quad (15)$$

$$V(r, 0) = b_1 \cdot r^\nu, \quad V(r, \varphi_2) = b_2 \cdot r^\nu, \quad (16)$$

где b_1, b_2 — заданные комплексные, $\nu > 2$ — заданное действительное число, $0 < \varphi_2 \leq \varphi_1$.

Решение задачи. Из вида функции $P_{v,1}(\varphi)$, $P_{v,2}(\varphi)$, $Q_{v,1}(\varphi)$, $Q_{v,2}(\varphi)$ и $F_v(\varphi)$ следует

$$P_{v,1}(0) = Q_{v,1}(0) = F_v(0) = 0, \quad Q_{v,2}(0) = \psi_{v,2}(0), \quad P_{v,2}(0) = \psi_{v,1}(0). \quad (17)$$

Для решения задачи $S - B$ используем формулу (14). Тогда автоматически имеет место (15). Поэтому остается подобрать произвольные постоянные c_1 и c_2 так, чтобы функция $V_v(r, \varphi)$, заданная по формуле (14), удовлетворяла краевым условиям (16). Подставляя эту функцию $V_v(r, \varphi)$ в граничные условия (16), с учетом (17) получим:

$$\begin{aligned} c_1 \psi_{v,1}(0) + c_2 \psi_{v,2}(0) &= b_1, \\ \overline{c_1} P_{v,1}(\varphi_2) + \overline{c_2} Q_{v,1}(\varphi_2) + c_1 P_{v,2}(\varphi_2) + c_2 Q_{v,2}(\varphi_2) + F_v(\varphi_2) &= b_2. \end{aligned} \quad (18)$$

1) Пусть $\psi_{v,1}(0) \neq 0$. Тогда при $\Delta_{v,1}(\varphi_2) = |A_{v,1}(\varphi_2)|^2 - |B_{v,1}(\varphi_2)|^2 \neq 0$, где

$$A_{v,1}(\varphi_2) = \psi_{v,1}(0) \overline{(\psi_{v,1}(0) Q_{v,1}(\varphi_2) - \psi_{v,2}(0) P_{v,1}(\varphi_2))},$$

$$B_{v,1}(\varphi_2) = \overline{\psi_{v,1}(0)} (\psi_{v,1}(0) Q_{v,2}(\varphi_2) - \psi_{v,2}(0) P_{v,2}(\varphi_2)),$$

алгебраическая система (18) имеет единственное решение:

$$\begin{cases} c_2 = \frac{1}{\Delta_{v,1}(\varphi_2)} (A_{v,1}(\varphi_2) \cdot \overline{D_{v,1}(\varphi_2)} - B_{v,1}(\varphi_2) \cdot D_{v,1}(\varphi_2)), \\ c_1 = \frac{b_1 - c_2 \psi_{v,2}(0)}{\psi_{v,1}(0)}, \end{cases} \quad (19)$$

где $D_{v,1}(\varphi_2) = (b_2 - F_v(\varphi_2)) \overline{\psi_{v,1}(0)}^2 - \overline{\psi_{v,1}(0)} P_{v,1}(\varphi_2) \cdot \overline{b_1} - \overline{\psi_{v,1}(0)} \cdot P_{v,2}(\varphi_2) \cdot b_1$.

Если $\Delta_{v,1}(\varphi_2) = 0$, то для разрешимости системы (18) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\operatorname{Im}[(A_{v,1}(\varphi_2) + B_{v,1}(\varphi_2)) \overline{D_{v,1}(\varphi_2)}] = 0. \quad (20)$$

При выполнении этого условия решение системы (18) имеет вид

$$c_2 = \begin{cases} \frac{-i\beta(A_{v,1}(\varphi_2) - B_{v,1}(\varphi_2)) + i \operatorname{Re} D_{v,1}(\varphi_2)}{\operatorname{Im}(A_{v,1}(\varphi_2) - B_{v,1}(\varphi_2))}, & \text{если } \operatorname{Im}(A_{v,1}(\varphi_2) - B_{v,1}(\varphi_2)) \neq 0, \\ \frac{i\beta(A_{v,1}(\varphi_2) + B_{v,1}(\varphi_2)) + \operatorname{Re} D_{v,1}(\varphi_2)}{\operatorname{Re}(A_{v,1}(\varphi_2) + B_{v,1}(\varphi_2))}, & \text{если } \operatorname{Re}(A_{v,1}(\varphi_2) + B_{v,1}(\varphi_2)) \neq 0, \\ c_3, & \text{если } \operatorname{Re}(A_{v,1}(\varphi_2) + B_{v,1}(\varphi_2)) = 0, \quad \operatorname{Im}(A_{v,1}(\varphi_2) - B_{v,1}(\varphi_2)) = 0, \end{cases} \quad (21)$$

$c_1 = \frac{b_1 - c_2 \psi_{v,2}(0)}{\psi_{v,1}(0)}$, где β — произвольное действительное и c_3 — произвольное комплексное число.

2) Пусть $\psi_{v,1}(0) = 0$ и $\psi_{v,2}(0) \neq 0$. Тогда при $\Delta_{v,2}(\varphi_2) = |P_{v,1}(\varphi_2)|^2 - |P_{v,2}(\varphi_2)|^2 \neq 0$, алгебраическая система (18) имеет единственное решение:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{P_{v,1}(\varphi_2) \cdot \overline{D_{v,2}(\varphi_2)} - P_{v,2}(\varphi_2) \cdot D_{v,2}(\varphi_2)}{\Delta_{v,2}(\varphi_2)}, \\ c_2 = \frac{b_1}{\Psi_{v,2}(0)}, \end{cases} \quad (22)$$

где $D_{v,2}(\varphi_2) = b_2 - F_v(\varphi_2) - \frac{\overline{b_1}}{\Psi_{v,2}(0)} Q_{v,1}(\varphi_2) - \frac{b_1}{\Psi_{v,2}(0)} Q_{v,2}(\varphi_2)$.

Если $\Delta_{v,2}(\varphi_2) = 0$, то для разрешимости системы (18) необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\text{Im}[(P_{v,1}(\varphi_2) + P_{v,2}(\varphi_2))D_{v,2}(\varphi_2)] = 0. \quad (23)$$

При выполнении этого условия решение системы (18) имеет вид

$$c_1 = \frac{b_1 - c_2 \Psi_{v,2}(0)}{\Psi_{v,1}(0)},$$

$$c_2 = \begin{cases} \frac{-i\beta(\overline{P_{v,1}(\varphi_2)} - P_{v,2}(\varphi_2)) + i \text{Re} D_{v,2}(\varphi_2)}{\text{Im}(P_{v,1}(\varphi_2) - P_{v,2}(\varphi_2))}, & \text{если } \text{Im}(P_{v,1}(\varphi_2) - P_{v,2}(\varphi_2)) \neq 0, \\ \frac{i\beta(P_{v,1}(\varphi_2) + \overline{P_{v,2}(\varphi_2)}) + \text{Re} D_{v,2}(\varphi_2)}{\text{Re}(P_{v,1}(\varphi_2) + P_{v,2}(\varphi_2))}, & \text{если } \text{Re}(P_{v,1}(\varphi_2) + P_{v,2}(\varphi_2)) \neq 0, \\ c_3, & \text{если } \text{Im}(P_{v,1}(\varphi_2) - P_{v,2}(\varphi_2)) = 0, \quad \text{Re}(P_{v,1}(\varphi_2) + P_{v,2}(\varphi_2)) \neq 0, \end{cases} \quad (24)$$

3) Пусть теперь $\Psi_{v,1}(0) = \Psi_{v,2}(0) = 0$. В этом случае для разрешимости системы (18) необходимо, чтобы $b_1 = 0$. Если $b_1 = 0$, то одно из чисел c_1 и c_2 будет произвольным. Пусть, например, c_2 будет произвольным. Тогда при $\Delta_{v,2}(\varphi_2) \neq 0$ решение системы (18) имеет вид:

$$c_1 = \frac{P_{v,1}(\varphi_2) \cdot \overline{D_{v,3}(\varphi_2)} - P_{v,2}(\varphi_2) \cdot D_{v,3}(\varphi_2)}{\Delta_{v,2}(\varphi_2)}, \quad (25)$$

где $D_{v,3}(\varphi_2) = -\overline{c_2} Q_{v,1}(\varphi_2) - c_2 Q_{v,2}(\varphi_2) - F_v(\varphi_2)$, c_2 — произвольное комплексное число. При $\Delta_{v,2}(\varphi_2) = 0$, $b_1 = 0$ для разрешимости системы (18) необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\text{Im}((P_{v,1}(\varphi_2) + P_{v,2}(\varphi_2))D_{v,3}(\varphi_2)) = 0. \quad (26)$$

В этом случае система (18) имеет решение

$$c_1 = \begin{cases} \frac{-i\beta(\overline{P_{v,1}(\varphi_2)} - P_{v,2}(\varphi_2)) + i \text{Re} D_{v,3}(\varphi_2)}{\text{Im}(P_{v,1}(\varphi_2) - P_{v,2}(\varphi_2))}, & \text{если } \text{Im}(P_{v,1}(\varphi_2) - P_{v,2}(\varphi_2)) \neq 0, \\ \frac{i\beta(P_{v,1}(\varphi_2) + \overline{P_{v,2}(\varphi_2)}) + \text{Re} D_{v,3}(\varphi_2)}{\text{Re}(P_{v,1}(\varphi_2) + P_{v,2}(\varphi_2))}, & \text{если } \text{Re}(P_{v,1}(\varphi_2) + P_{v,2}(\varphi_2)) \neq 0, \\ c_3, & \text{если } \text{Im}(P_{v,1}(\varphi_2) - P_{v,2}(\varphi_2)) = 0, \quad \text{Re}(P_{v,1}(\varphi_2) + P_{v,2}(\varphi_2)) = 0, \end{cases} \quad (27)$$

где β — произвольное действительное, а c_2 — произвольное комплексное число. Следовательно, имеет место

Теорема 2. 1) Пусть $\Psi_{v,1}(0) \neq 0$. Тогда при $\Delta_{v,1}(\varphi_2) \neq 0$ задача $S - B$ имеет единственное решение, которое находится по формулам (14), (19), а при $\Delta_{v,1}(\varphi_2) = 0$ для разрешимости задачи $S - B$ необходимо и достаточно выполнения условия (20). При выполнении этого условия задача $S - B$ имеет бесконечное множество решений, которое находится по формулам (14), (21).

2) Пусть $\psi_{v,1}(0) = 0$, $\psi_{v,2}(0) \neq 0$. Тогда при $\Delta_{v,2}(\varphi_2) \neq 0$ задача $S - B$ имеет единственное решение, которое находится по формулам (14) и (22), а при $\Delta_{v,2}(\varphi_2) = 0$ для разрешимости задачи $S - B$ необходимо и достаточно выполнения условия (23). При выполнении этого условия задача $S - B$ имеет бесконечное множество решений, которое находится по формулам (14), (24).

3) Пусть $\psi_{v,1}(0) = \psi_{v,2}(0) = 0$. Тогда при $\Delta_{v,2}(\varphi_2) \neq 0$ задача $S - B$ разрешима только тогда, когда $b_1 = 0$. В этом случае она имеет бесконечное множество решений, которые определяются по формуле (14), где c_2 — произвольное число, а c_1 находится по формуле (25), а при $\Delta_{v,2}(\varphi_2) = 0$ и $b_1 = 0$ для разрешимости задачи $S - B$ необходимо и достаточно выполнения условия (26). При выполнении этого условия задача $S - B$ имеет бесконечное множество решений, которое находится по формулам (14), (27).

Замечание. При $\varphi_2 = \varphi_1$ задача типа Самарского-Бицадзе дает задачу типа Дирихле, которая рассмотрена в [1]. Там также изучен случай, когда $\varphi_2 = \varphi_1 = 2\pi$.

References

1. *Tungatarov A., Sarsenbayeva M.S., Uaisov B.* About the Dirihle type problem for one class of elliptic systems of the second order on a plane with polar feature // Vestn ENU of L.N. Gumileva. — 2008. — № 4 — P. 109–117.

УДК 517.62

О приближенном методе нахождения изолированного решения нелинейной двухточечной краевой задачи

On the approaching method of finding of nonlinear two points boundary value problem's isolated solution

Темешева С.М.

Институт математики МОН РК, Алматы (e-mail: anar@math.kz, nur15@mail.ru)

Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесінің сызқты емес екі нүктелі шеттік есебін шешу үшін параметрлеу әдісінің екі параметрлі алгоритмдер әулеті ұсынылады. Дифференциалдық теңдеудің оң жағындағы функциясы, шекаралық шарт функциясы, есеп қарастырылып отырған кесіндіні бөліктеу қадамы бойынша енгізілген қосымша параметрлерді табу үшін сызқты емес алгебралық теңдеулер жүйесі құрылған. Құрастырылған алгоритмдердің жинақты болуының және зерттеліп отырған есептің оқшауланған шешімі бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары тағайындалады.

The nonlinear two points boundary value problem for system of ordinary differential equations is considered. Two parameters families of parameterization's method algorithms of findings of investigating problem's approaching solution is offered. On functions of the right part of differential equation, the boundary value condition, step of the pounding in interval, on which boundary value problem is considered, nonlinear system of the algebraic equations for finding of introducing additional parameter is constructed. They necessary and sufficient conditions of convergence constructed algorithms and existence of the isolated solution of investigating problem are established.

В работе рассматривается нелинейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$g(x(0), x(T)) = 0, \quad (2)$$

где $f: [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$, $g: R^n \times R^n \rightarrow R^n$ непрерывны.