

Р.С.Каренов

*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: 22Gulim1988@mail.ru)***Методика анализа и оптимизации сетевого графика**

Отмечено, что, после того как сетевой график построен и рассчитаны его основные показатели, приступают к его оптимизации. Обосновано, что под оптимизацией следует понимать последовательную корректировку сети для достижения наиболее эффективных результатов и заданных параметров по времени и ресурсам. Доказано, что оптимизация сетевого графика по времени — это сокращение его критического пути в соответствии с директивными сроками окончания комплекса работ. Рассмотрена система мероприятий, благодаря которой может быть достигнута оптимизация сетевого графика по времени. Сделан вывод о том, что многовариантные пересчеты сетевого графика при его оптимизации целесообразно проводить на ЭВМ. Раскрыты методические основы оптимизации сетевого графика по ресурсам. Уделено внимание оптимизации сетевых графиков по времени и стоимости.

Ключевые слова: сетевой график, оптимизация, анализ, коэффициент напряженности, путь, время, стоимость, модель.

Коэффициент напряженности работы

Как правило, после нахождения критического пути и резервов времени работ, оценки вероятности выполнения проекта в заданный срок должен быть проведен всесторонний анализ сетевого графика и приняты меры по его оптимизации. Этот весьма важный этап в разработке сетевых графиков раскрывает основную идею систем сетевого планирования и управления (система СПУ). Он заключается в приведении сетевого графика в соответствие с заданными сроками и возможностями организации, разрабатывающей проект [1–5].

Анализ сетевого графика начинается с анализа топологии сети, включающего контроль построения сетевого графика, установление целесообразности выбора работ, степени их расчленения.

Определить степень трудности выполнения в срок каждой группы работ не критического пути можно с помощью коэффициента напряженности работ.

Коэффициентом напряженности K_n работы (i, j) называется отношение продолжительности несовпадающих (заключенных между одними и теми же событиями) отрезков пути, одним из которых является путь максимальной продолжительности, проходящий через данную работу, а другим — критический путь:

$$K_n(i, j) = \frac{t(L_{\max}) - t'_{кр}}{t_{кр} - t'_{кр}}, \quad (1)$$

где $t(L_{\max})$ — продолжительность максимального пути, проходящего через работу (i, j) ; $t_{кр}$ — продолжительность (длина) критического пути; $t'_{кр}$ — продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем.

Формулу (1) можно легко привести к виду:

$$K_n(i, j) = 1 - \frac{R_n(i, j)}{t_{кр} - t'_{кр}},$$

где $R_n(i, j)$ — полный резерв времени работы (i, j) .

Коэффициент напряженности $K_n(i, j)$ может изменяться в пределах от 0 (для работ, у которых отрезки максимального из путей, не совпадающие с критическим путем, состоят из фиктивных работ нулевой продолжительности) до 1 (для работ критического пути).

Чем ближе к 1 коэффициент напряженности $K_n(i, j)$, тем сложнее выполнить данную работу в установленные сроки. Чем ближе $K_n(i, j)$ к нулю, тем большим относительным резервом обладает максимальный путь, проходящий через данную работу.

Вычисленные коэффициенты напряженности позволяют дополнительно классифицировать работы по зонам. В зависимости от величины $K_n(i, j)$ выделяют три зоны: критическую ($K_n(i, j) > 0,8$); подкритическую ($0,6 \leq K_n(i, j) \leq 0,8$); резервную ($K_n(i, j) < 0,6$).

Оптимизация сетевого графика в зависимости от полноты решаемых задач

Оптимизация сетевого графика представляет процесс улучшения организации выполнения комплекса работ с учетом срока его выполнения. Она проводится с целью сокращения длины критического пути, выравнивания коэффициентов напряженности работ, рационального использования ресурсов [6–9].

Довольно часто случается, что сетевой график (его параметры) не соответствует имеющимся ограничениям либо по времени, либо по ресурсам. Поэтому оптимизация может проводиться по следующим параметрам [10]:

- а) по времени;
- б) по ресурсам:
 - трудовым;
 - материальным;
 - денежным;
- в) по времени и стоимости.

Приоритет отдается оптимизации по времени, так как от этого зависит оптимизация по другим параметрам.

Оптимизация сетевого графика в зависимости от полноты решаемых задач может быть условно разделена на частную и комплексную [11].

Видами частной оптимизации сетевого графика являются минимизация времени выполнения комплекса работ при заданной его стоимости; минимизация стоимости комплекса работ при заданном времени выполнения проекта. Комплексная оптимизация представляет собой нахождение оптимального соотношения величин стоимости и сроков выполнения проекта в зависимости от конкретных целей, ставящихся при его реализации.

Оптимизация сетевых моделей по времени

Оптимизация сетевого графика по времени производится в том случае, если продолжительность работ по графику больше или меньше директивной продолжительности.

Существует несколько методов оптимизации по времени:

- сокращение продолжительности критических работ;
- расчленение критических работ и их запараллеливание;
- изменение топологии сети за счет изменения технологии работ.

1. Метод сокращения продолжительности критических работ. Сокращение продолжительности критического пути при использовании этого метода достигается за счет перераспределения ресурсов с некритических работ на критические. Этот метод оптимизации сети может применяться, если, например, продолжительность критического пути равна 24 дням и проект необходимо закончить за 20 дней.

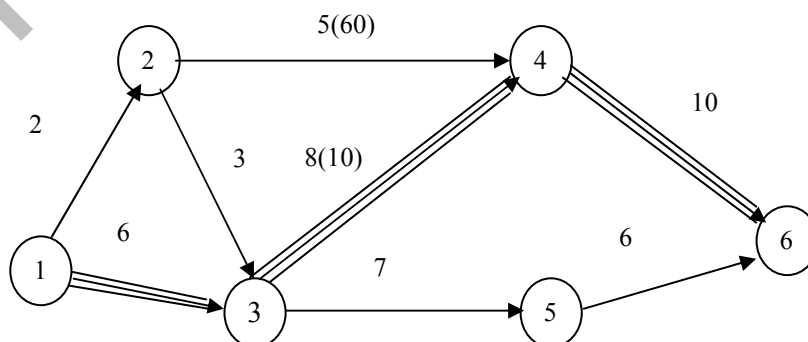


Рисунок 1. Сетевой график до оптимизации

В сетевом графике (рис. 1) над работами 2–4 и 3–4 в скобках указано количество трудовых ресурсов, занятых на этих работах до проведения оптимизации (рабочие, выполняющие эти работы, имеют одну и ту же специальность).

Если сократить продолжительность работы 3–4 на четыре дня и переключить на нее 18 человек с работы 2–4, сетевой график примет следующий вид (рис. 2).

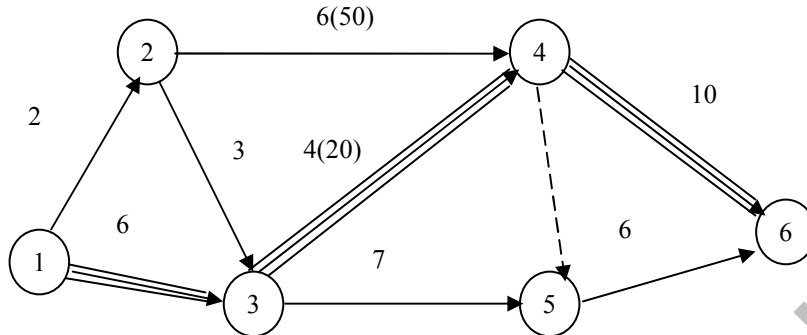


Рисунок 2. Сетевой график после оптимизации за счет перераспределения ресурсов

2. Метод расчленения критических работ и их запараллеливания. Для оптимизации сетевого графика этим методом необходимо тщательно проанализировать все работы критического пути.

Рассмотрим сетевой график, изображенный на рисунке 3.

После оптимизации графика продолжительность его критического пути вместо 24 дней составит 20 дней. В данном случае сокращение продолжительности критического пути достигнуто за счет перераспределения ресурсов, имеющихся внутри проекта, однако того же результата можно достичь и с помощью привлечения ресурсов со стороны.

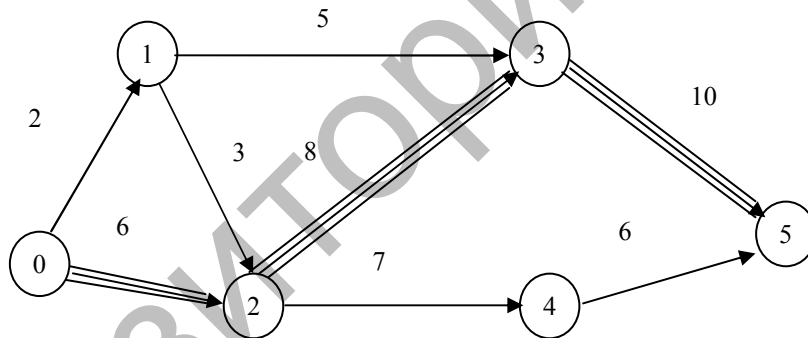


Рисунок 3. Сетевой график до оптимизации

После тщательного анализа этого графика можно установить, что работу 3–5 можно начать через четыре дня после начала работы 2–3, но при этом первую половину работы 3–5 необходимо закончить к моменту завершения работы 2–3 (рис. 4).

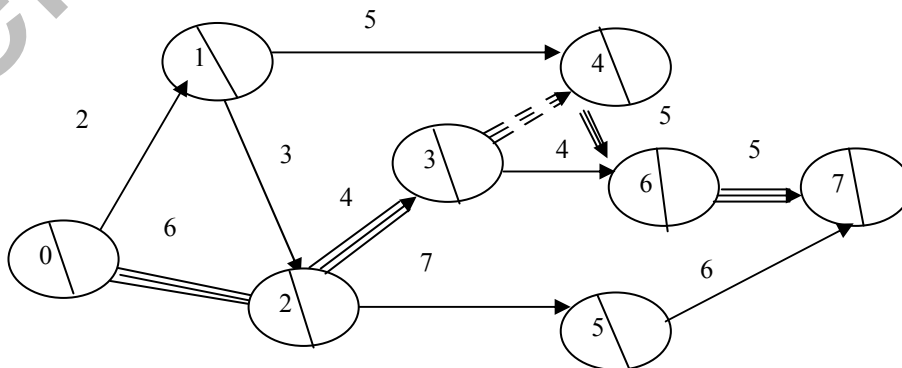


Рисунок 4. Сетевой график после оптимизации за счет расчленения и запараллеливания работ

Как видно из рисунка, в верхней части каждого события указан его номер до оптимизации, в нижней — номер после оптимизации. В результате применения метода расчленения и запараллеливания работ общая продолжительность работ 2–3 и 3–5 сократилась с 18 до 14 дней. Таким образом, общая продолжительность всей работы, то есть продолжительность критического пути, составила 20 дней.

Следует отметить, что применение рассматриваемого метода, как правило, позволяет сократить продолжительность выполнения по проекту примерно на 15–20 %.

3. Метод изменения топологии за счет изменения технологии работ. Этот метод основан на изменении зависимостей между работами.

Вернемся к сетевому графику, представленному на рисунке 3. Допустим, руководителю работы 3–5 необходимо увеличить продолжительность своей работы с 10 до 12 дней. Кроме того, после окончания работ 2–3 и 3–5 необходимо добавить еще один день для проверки результатов этих работ. Руководитель работы 2–3 также потребовал увеличить время выполнения его работы (с 8 до 12 дней). Руководитель проекта посчитал целесообразным удовлетворить требования руководителей работ 3–4 и 2–3 и увеличить продолжительность этих двух критических работ в общей сложности на семь дней, изменив при этом технологию работ.

После оптимизации за счет изменения технологии работ график будет иметь следующий вид (рис. 5).

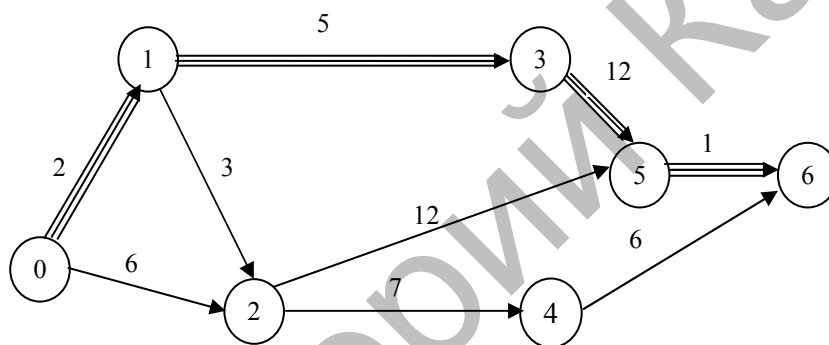


Рисунок 5. Сетевой график после оптимизации за счет изменения технологии работ

Как видно из рисунка, продолжительность критического пути составляет 20 дней. Рассмотренный пример оптимизации сетевого графика методом изменения технологии работ говорит о том, что необходимо внимательно относиться к составлению сетевых графиков, так как в самом процессе их разработки заложены огромные возможности по сокращению продолжительности проектов.

Следует иметь в виду, что если ни один из указанных методов не позволяет привести параметры сетевого графика к заданным ограничениям, то необходимо изменить эти ограничения.

Оптимизация сетевых моделей по ресурсам

Практика осуществления проектов показывает, что зачастую недостаточно упорядочить систему управления только по времени. Важным фактором в управлении любым проектом является правильное распределение ресурсов, которыми располагают исполнители работ. Поэтому при планировании сложных проектов огромное значение приобретает рациональное распределение всех видов имеющихся ресурсов. Одним из важнейших вопросов при разработке проекта является обеспечение соответствия между установленными сроками выполнения работ и имеющимися ресурсными возможностями.

Следует иметь в виду, что к оптимизации по различным видам ресурсов приступают после проведения оптимизации сетевых графиков по времени. Последовательность проведения оптимизации по отдельным видам ресурсов устанавливается в зависимости от пределов ограничения каждого из них в конкретных условиях.

С точки зрения постановки и решения задач распределения ресурсов целесообразно различать два типа ресурсов. К первому типу относятся невозобновляемые ресурсы, количество которых при использовании изменяется. К ним относятся материалы, финансы и т.д. Ко второму типу ресурсов

относятся возобновляемые ресурсы, которые в процессе использования не изменяются. К таким ресурсам относятся трудовые ресурсы, машины, производственные площади.

Различие свойств двух перечисленных видов ресурсов вызывает необходимость отдельной постановки задачи для невозобновляемых и возобновляемых ресурсов. Так, для невозобновляемых ресурсов выделяют следующие постановки задач:

- найти минимальную стоимость выполнения комплекса работ при заданном времени и известных функциях стоимости каждой работы от ее продолжительности;
- при известных функциях стоимости от продолжительности и ограниченных ресурсах минимизировать время выполнения всего комплекса работ;
- при известных функциях стоимости от продолжительности каждой работы найти зависимость минимальной стоимости всего комплекса работ от продолжительности его реализации.

Для возобновляемых ресурсов различают следующие постановки задач:

- найти минимальное время выполнения комплекса работ при постоянных или переменных интенсивностях потребления каждого из ограниченных ресурсов;
- максимально сгладить неравномерность использования ресурсов при заданном времени выполнения комплекса работ;
- при заданной функции наличных ресурсов выполнить комплекс работ в заданный срок.

Как показывает практика, на сегодняшний день чаще всего лимитирующими оказываются трудовые ресурсы.

1. Оптимизация сетевых моделей по трудовым ресурсам. При осуществлении любого проекта, а особенно при осуществлении проектов на постоянной основе в рамках одной организации, огромное значение имеет непрерывность и равномерность использования трудовых ресурсов. Оптимизация сетевых графиков по этому параметру осуществляется последовательно в пределах имеющихся частных резервов времени.

Рассмотрим условный пример.

На предприятии, реализующем проект, работают 70 человек (см. рис. 6). Необходимо оптимизировать данный график, чтобы ежедневно на работах были заняты все 70 человек.

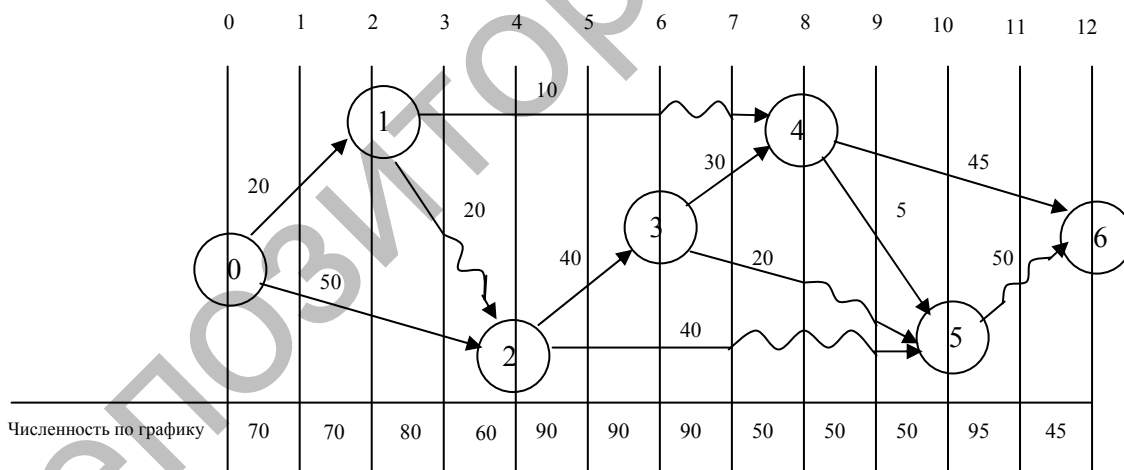


Рисунок 6. Сетевой график до оптимизации

Подсчитав на сетевом графике количество работников, ежедневно занятых на проекте, можно увидеть, что только в первые два дня планируемая численность работников соответствует заданному ограничению, а во все последующие дни она либо больше, либо меньше фактической.

Таким образом, в третий день, когда плановая численность работников превышает фактическую, многие работы могут быть не выполнены в заданные сроки, т.е. пойти с опозданием. Известно, что, если срыв сроков произошел на критических работах, в дальнейшем ликвидировать его последствия довольно сложно. Следовательно, если полученная расчетная (плановая) численность не соответствует заданным ограничениям, необходимо оптимизировать график выполнения проекта.

Для того чтобы уменьшить число людей, занятых на работах в третий день, и увеличить число людей, занятых на работах в четвертый день, нужно продлить срок выполнения работы 1–2 с одного

до двух дней за счет имеющегося на этой работе частного резерва времени и вдвое сократить численность занятых на ней работников. Аналогично следует поступить с работами 2–5 и 5–6. В данной ситуации трудоемкость работ рассматривается как величина неизменная.

После оптимизации по трудовым ресурсам сетевой график будет выглядеть так, как показано на рисунке 7.

Как видно, в результате оптимизации ежедневная численность работающих составляет 70 человек. Появились новые критические пути, так как по некоторым работам полностью использованы резервы времени. Если оптимизация не дала положительного результата, необходимо изменить продолжительность отдельных работ, выйдя за пределы резервов времени, потому что при сохранении прежней продолжительности многие работы в заданные сроки выполнены не будут.

2. Оптимизация сетевых моделей по материальным ресурсам. Оптимизация по материальным ресурсам осуществляется последовательно по каждому виду ресурса в пределах имеющихся частных резервов времени. В первую очередь оптимизацию следует проводить по тому виду ресурсов, который является определяющим для выполнения данного комплекса работ по проекту.

Допустим, на строительную площадку для выполнения работ по проекту еженедельно может поступать не более 500 м³ бетона. Параметры сетевого графика данного проекта представлены в таблице 1. Необходимо оптимизировать сетевой график проекта, чтобы эти ограничения не привели к увеличению продолжительности проекта.

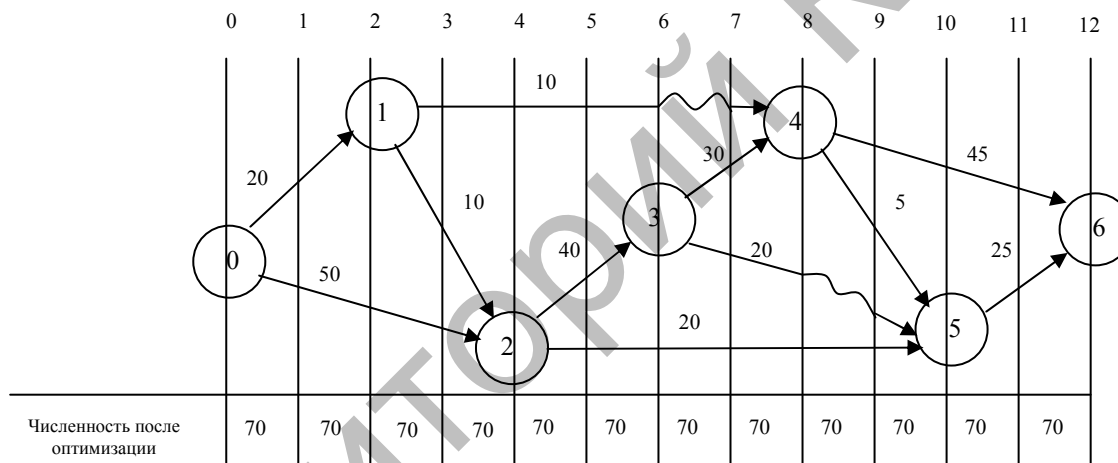


Рисунок 7. Сетевой график после оптимизации по трудовым ресурсам

Т а б л и ц а 1

Исходные параметры сетевого графика

Коды работ		Параметры графика до оптимизации		Потребность в бетоне, м ³
<i>i</i>	<i>j</i>	<i>t_{i-j}</i>	<i>r_{i-j}</i>	
0	1	1	0	300
0	2	1	1	400
1	2	1	0	300
1	3	1	2	500
2	3	2	0	400
2	4	1	2	400
3	4	1	0	100

Для определения расхода бетона в ходе выполнения работ по проекту в таблице с исходными параметрами справа добавим расчетные графы (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

Форма таблицы для определения расхода бетона в ходе выполнения работ по проекту

Коды работ		Параметры графика до оптимизации		Потребность в бетоне, м ³	Рабочее время графика в неделях				
<i>i</i>	<i>j</i>	<i>t_{i-j}</i>	<i>r_{i-j}</i>		1	2	3	4	5

Заполним таблицу по каждой работе дробными числами (табл. 3), в которых числитель будет показывать еженедельную потребность (расход бетона) на протяжении всего времени выполнения данной работы, а знаменатель — оставшуюся после исполнения данной работы часть от объема возможной поставки бетона. Полученный остаток будем направлять для использования на следующей работе, для которой в числителе опять будем записывать потребность (расход), а в знаменателе — новый остаток, и так до полного использования объема поставки.

Т а б л и ц а 3

Использование бетона в ходе выполнения работ по проекту

Коды работ		Параметры графика до оптимизации		Потребность в бетоне, м ³	Рабочее время графика в неделях				
<i>i</i>	<i>j</i>	<i>t_{i-j}</i>	<i>r_{i-j}</i>		1	2	3	4	5
0	1	1	0	300	$\frac{300}{200}$				
0	2	1	1	400	$\frac{200}{0}$	$\frac{200}{300}$			
1	2	1	0	300		$\frac{300}{0}$			
1	3	1	2	500			$\frac{300}{200}$	$\frac{300}{200}$	
2	3	2	0	400			$\frac{200}{0}$	$\frac{200}{0}$	
2	4	1	2	400					$\frac{400}{100}$
3	4	1	0	100					$\frac{100}{0}$
Возможный объем поставки					500	500	500	500	500

Из приведенной таблицы видно, что бетоном в первую очередь необходимо обеспечивать работы 0–1, 1–2, 2–3 и 3–4, причем в точно установленные сроки, так как эти работы являются критическими. Другие работы имеют частные резервы времени, поэтому можно либо отодвигать их начала, либо увеличивать их продолжительность.

Работа 0–2 не может закончиться за одну неделю в связи с тем, что в первую неделю свободный остаток бетона составляет 200 м³, а потребность — 400 м³. Поэтому, используя частный резерв времени, нужно увеличить продолжительность работы до двух недель, распределив ее потребность в бетоне на две недели, т.е. по 200 м³ еженедельно.

Работа 1–3 не может начаться сразу после окончания предшествующей работы — работы 0–1, так как бетон, поступающий во вторую неделю, полностью распределяется между работами 1–2 и 0–2. Кроме того, работа 1–3 не может быть выполнена за одну неделю, как это определено ее продолжительностью, потому что в третью неделю из 500 м³ поставляемого бетона необходимо выделить 200 м³ на критическую работу 2–3. Следовательно, мы вынуждены, помимо смещения начала работы 1–3 на одну неделю, увеличить ее продолжительность до двух недель, равномерно распределив потребность этой работы в бетоне — 600 м³ на две недели: третью и четвертую.

Работа 2–4 не может выполняться ни в третью, ни в четвертую недели, так как в этот период общее количество поставляемого бетона уже полностью распределено между работами 2–3 и 1–3. В связи с этим отодвигаем срок выполнения работы 2–4 на пятую неделю.

Таким образом, сетевой график оптимизирован с учетом данных ограничений.

Процесс оптимизации сетевого графика по ресурсам можно выполнить также при помощи масштабного сетевого графика, аналогично тому, как это было сделано при оптимизации по трудовым ресурсам. Воспользуемся теми же самыми исходными данными (см. табл. 1).

В сетевом графике до оптимизации по материальным ресурсам (рис. 8) над стрелками указано необходимое для каждой работы количество бетона.

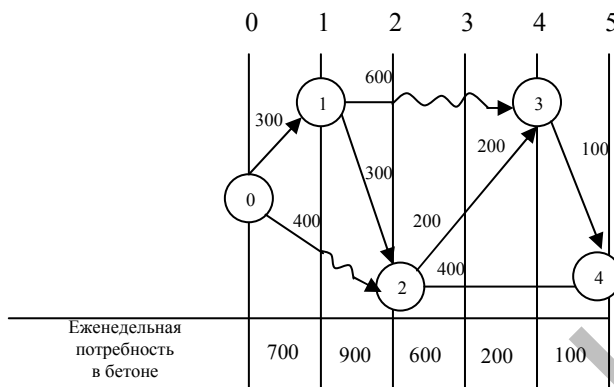


Рисунок 8. Сетевой график до оптимизации по материальным ресурсам

Как видно из графика, первые три недели необходимое количество бетона постоянно превышает поставляемое количество. Так, в первую неделю потребность превышает поставку на 200 м^3 , во вторую неделю — на 400 м^3 , в третью неделю — на 100 м^3 .

После оптимизации по материальным ресурсам сетевой график будет выглядеть следующим образом (рис. 9).

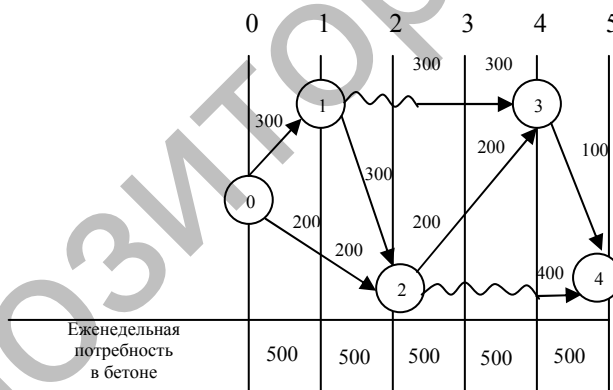


Рисунок 9. Сетевой график после оптимизации по материальным ресурсам

После оптимизации еженедельная потребность в бетоне стала равна еженедельной поставке. Однако следует иметь в виду, что в случае, когда все резервы времени использованы на всех работах, а потребность в ресурсах в единицу времени превышает их поступление, возникает необходимость изменить либо технологию работ, либо увеличить общую продолжительность критического пути.

3. Оптимизация сетевых моделей по денежным ресурсам. При планировании денежных ресурсов, необходимых для реализации проекта, как правило, стремятся к их равномерному распределению в течение года. В связи с этим возникает вопрос: как увязать планы в денежном выражении с объемами работ по сетевым графикам? Этот вопрос может быть решен в процессе оптимизации сетевых графиков по денежным ресурсам.

Заменим в таблицах 1 и 3 данные по бетону на данные по денежным средствам, необходимым для выполнения работ, то есть физические объемы работ переведем в денежный эквивалент, например, в тенге. В качестве ограничения примем ту же величину — 500. Это будет означать, что еженедельный плановый объем работ составляет 500 тыс. тенге. Оптимизация по денежным ресурсам осу-

ществляется аналогично оптимизации по материальным ресурсам. Исключением может оказаться случай, когда проект не вписывается в бюджетные ограничения организации на определенный период. Например, на год по плану отпущено 2,0 млн тенге, а подсчет объемов работ по сетевому графику показывает, что для осуществления проекта необходимо 2,3 млн тенге. Задача оптимизации будет сводиться к тому, чтобы из графика выбрать ряд работ, которые можно будет перенести на следующий год без изменения общей величины продолжительности критического пути.

Процедура оптимизации сетевой модели по стоимости и ресурсам

Выше нами рассмотрены вопросы оптимизации сетевых графиков с точки зрения приведения параметров к какому-либо одному заданному ограничению. Однако значительный интерес представляет оптимизация сетевых графиков по времени и стоимости, в процессе которой решается вопрос, как уложиться в заданные ограничения по времени с минимальными дополнительными затратами. Рассмотрим данный вопрос более обстоятельно применительно к практике работы угольной промышленности.

На угледобывающих предприятиях (шахта, карьер) сущность применения сетевых методов проектирования и планирования состоит в численном установлении рациональных схем и последовательностей выполнения каких-либо работ, процессов, свершения событий. Сетевое моделирование дает графическое представление о структуре всех сложных производственных процессов и технологических схем и аналитическое численное решение оценки разных сторон проектируемых процессов, при этом позволяя оптимизировать отдельные элементы или всю модель угольного предприятия в целом.

Оптимизация основных параметров разработки шахтного поля на этапе проектирования шахты заключается в определении оптимальной схемы вскрытия, способа подготовки, системы разработки. Наличие этой информации позволяет полностью определить и зафиксировать перечень всех работ (операций) по извлечению запасов шахтного поля и последовательность их выполнения. Эти данные служат основой для построения первоначального сетевого графика развития горных работ и последующего расчета оптимального по стоимости с учетом ресурсов календарного плана развития горных работ. Возможность регулярной оперативной корректировки сетевого графика в зависимости от изменения геологических и горнотехнических условий делает возможной регулярную оперативную корректировку оптимального по стоимости и ресурсам календарного плана. Наличие алгоритма и соответствующей стандартной программы на ЭВМ для оперативной оптимизации календарного плана в процессе эксплуатации шахты делает этот план эффективным средством оперативного управления шахтой.

Процедуру оптимизации сетевой модели по стоимости и ресурсам можно представить в следующем виде. В результате построения сетевого графика развития горных работ и его обсчета на ЭВМ определяется календарный план развития горных работ, в котором указывается минимально и максимально возможное время (условная дата) $T_{\min}(i)$ и $T_{\max}(i)$ осуществления каждого события i сетевого графика. Время $T(i)$ отсчитывается от момента осуществления нулевого события $T_0 = 0$. Кроме того, в календарном плане указываются резервы времени для каждой операции. Время $T_n = \lambda$ осуществления последнего n -го события представляет собой одновременно и минимально возможное время осуществления всего заданного комплекса работ V по выемке запасов шахтного поля при заданной нормальной продолжительности D_{ij} каждой операции, входящей в сетевую модель. Однако полученный календарный план развития горных работ длительности λ не является оптимальным с точки зрения полной стоимости $C^{\text{полн}}$ всего комплекса работ V по извлечению фиксированных запасов шахтного поля. Полные затраты на выполнение всего комплекса работ V можно разделить на прямые затраты $C^{\text{прям}}$ и косвенные затраты $C^{\text{косв}}$:

$$C^{\text{полн}} = C^{\text{прям}} + C^{\text{косв}}. \quad (2)$$

Прямые затраты $C^{\text{прям}}$ на выполнение комплекса работ V складываются из прямых затрат C_{ij} на выполнение каждой операции (i, j) , входящей в комплекс V . Прямые затраты C_{ij} на выполнение операции (i, j) складываются из переменных и постоянных затрат:

$$C_{ij}^{\text{прям}} = C_{ij}^{\text{пер}} + C_{ij}^{\text{пост}}.$$

Переменные затраты, как правило, включают в себя затраты на заработную плату и амортизационные отчисления, в то время как, например, затраты на материалы и электроэнергию обычно относятся к постоянным затратам.

Пусть D_{ij} — нормальная (благоразумная) продолжительность операции (i, j) , полученная из сетевого графика развития горных работ и представляющая собой математическое ожидание времени, необходимого на выполнение данной операции.

Обозначим через $C_{t_{ij}}$ прямые затраты на выполнение операции (i, j) , когда продолжительность ее равна t_{ij} . Тогда для любой продолжительности t_{ij} имеет место $C_{t_{ij}} = C_{D_{ij}}$, если $t_{ij} \geq D_{ij}$.

Другими словами, D_{ij} есть такая продолжительность выполнения операции (i, j) , при которой всякое увеличение продолжительности этой операции по сравнению с D_{ij} не увеличивает прямых затрат C_{ij} .

Напротив, всякое сокращение продолжительности операции (i, j) по сравнению с D_{ij} за счет интенсификации работы в той или иной форме неизбежно связано с дополнительными прямыми затратами и, следовательно, ведет к увеличению C_{ij} , то есть $C_{t_{ij}} > C_{D_{ij}}$, если $t_{ij} < D_{ij}$. Это увеличение прямых затрат при сокращении продолжительности t_{ij} выполнения операции (i, j) обычно связано с ростом переменных расходов на зарплату или амортизационные отчисления при интенсификации производственного процесса.

На практике, исходя из природы самой операции и условий, в которых она выполняется, всегда можно указать минимально возможную ее продолжительность d_{ij} . Таким образом, интересующая нас продолжительность t_{ij} изменяется в замкнутом интервале $[d_{ij}, D_{ij}]$. В общем случае изменение прямых затрат C_{ij} в зависимости от продолжительности t_{ij} может быть выражено невозрастающей выпуклой функцией. Так как на практике мы можем иметь ограниченное дискретное число значений C_{ij} для конкретных t_{ij} , то целесообразно аппроксимировать кривую прямых затрат невозрастающей выпуклой кусочно-линейной функцией. В частности, если мы имеем всего два значения этой функции $C_{d_{ij}}$ и $C_{D_{ij}}$, то функция аппроксимируется линейной зависимостью, как это показано на рисунке 10, а.

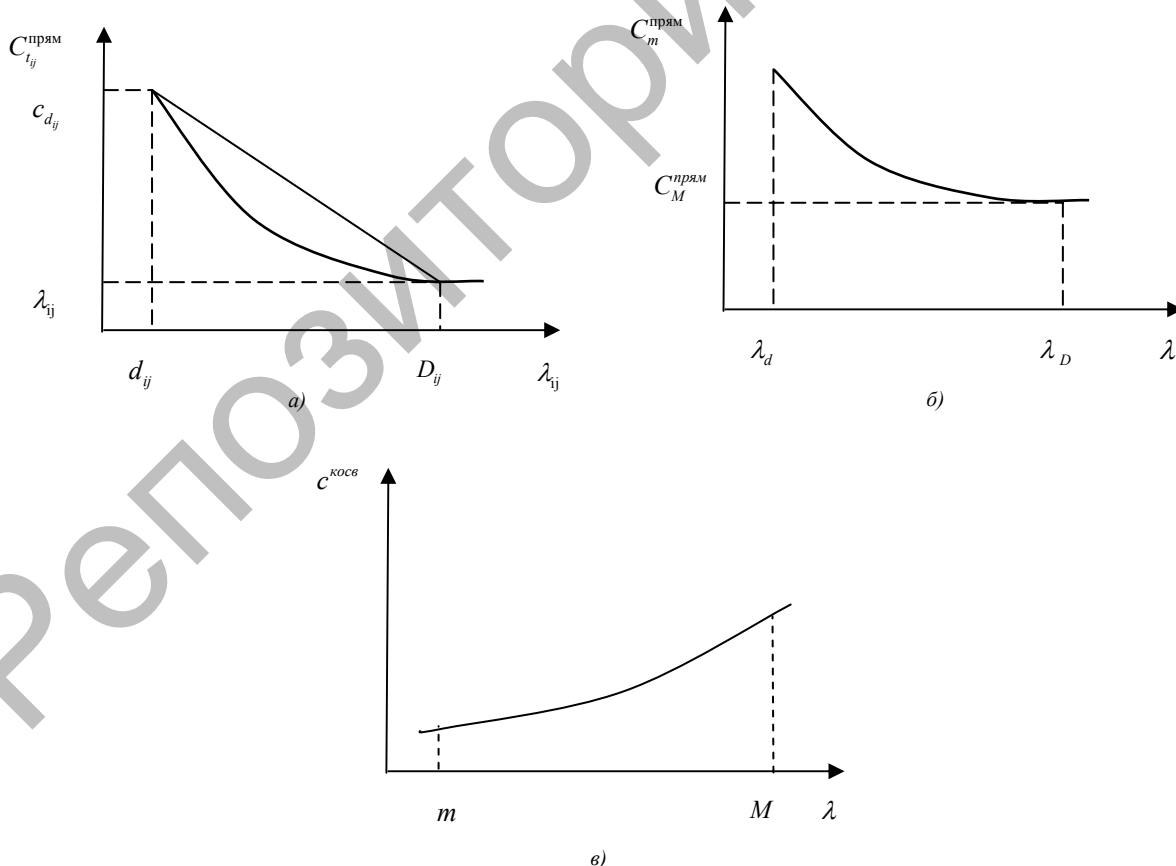


Рисунок 10. График изменения составляющих затрат

Так как прямые расходы $C^{прям}$ складываются из прямых расходов C_{ij} для всех (i, j) из V , то всякое сокращение продолжительности операций (i, j) по сравнению с нормальной ведет к возрастанию $C^{прям}$. Если при этом сокращается продолжительность операций, лежащих на критическом пути, то это ведет к сокращению продолжительности λ выполнения всего комплекса V .

В общем виде изменение прямых затрат $C^{прям}$ в зависимости от λ изобразится невозрастающей выпуклой кусочно-линейной функцией, показанной на рисунке 10, б. На графике: λ_D — продолжительность всего комплекса V , когда продолжительность всех операций нормальная ($t_{ij} = D_{ij}$); λ_d — продолжительность всего комплекса V , когда продолжительность всех операций минимальная ($t_{ij} = d_{ij}$).

К косвенным затратам $C^{косв}$ относятся затраты на те процессы, которые не входят в комплекс работ, но непосредственно необходимы для выполнения комплекса работ V (например, подъем, транспорт, содержание административного персонала). Косвенные затраты увеличиваются с увеличением продолжительности выполнения всего комплекса работ V , как это показано на рисунке 10, в.

Суммируя значения прямых и косвенных затрат согласно (2), получим кривую полных затрат на выполнение комплекса работ V в зависимости от λ , показанную на рисунке 11.

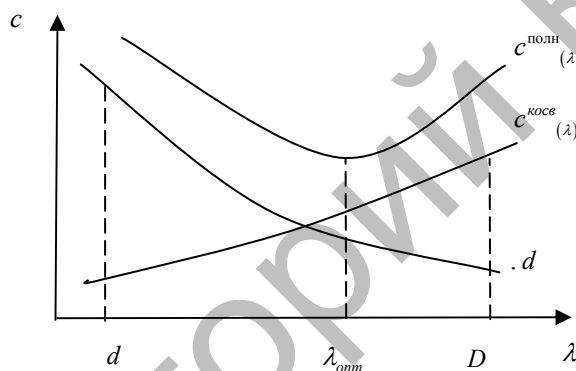


Рисунок 11. График изменения общих затрат (к оптимизации сетевого графика по стоимости)

Как видно из этого рисунка, целесообразно сократить продолжительность операций, входящих в V так, чтобы общая продолжительность комплекса работ стала равной λ_{opt} . При этом полная стоимость комплекса V станет минимальной $C_{min}^{полн}$.

С помощью данного метода оптимизации календарного плана развития горных работ можно найти оптимальную продолжительность каждой операции t_{ij}^0 и оптимальное время t_i^0 осуществления каждого события сетевого графика, т.е. определить оптимальный по стоимости календарный план развития горных работ на шахте. Наличие такого плана полностью исключает затраты на интенсификацию тех работ, где это нецелесообразно и, наоборот, указывает те работы, где такая интенсификация необходима и экономически оправдана.

Для оптимизации сетевых моделей по фактору стоимости могут быть использованы следующие методы: градиентный метод; метод линейного программирования; метод динамического программирования с дискретным представлением исходных данных.

Наиболее простым методом оптимизации сетевых моделей по фактору стоимости является градиентный метод. Для решения задач оптимизации сетевых моделей по фактору стоимости градиентным методом и методом динамического программирования созданы стандартные программы на ЭВМ.

Методы сетевого планирования при проектировании оказываются особенно полезными при разработке плана организации строительства, календарного плана развития горных работ и т.д. Опираясь на вычислительную технику, методы сетевого планирования позволяют создавать проекты, кото-

рые, наряду с эффективным использованием времени, материалов, людских ресурсов и др., обеспечивают возможность четкого оперативного руководства при их реализации.

Список литературы

- 1 *Большаков А.С.* Моделирование в менеджменте: Учеб. пособие. — М.: Информ.-изд. дом «Филинь», Рилант, 2000. — 464 с.
- 2 *Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Дайитбегов Д.М. и др.* Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие. — М.: ЮНИТИ, 1999. — 391 с.
- 3 *Разумов И.М., Белова Л.Д., Ипатов М.И., Проскуряков А.В.* Сетевые графики в планировании: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1981. — 168 с.
- 4 *Ахьюджа Х.* Сетевые методы управления в проектировании и производстве / Пер. с англ. — М.: Мир, 1979. — 639 с.
- 5 *Терехов Л.Л., Куценко В.А., Сиднев С.П.* Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении. — Киев: Вища шк., 1987. — 231 с.
- 6 *Бороздин И.Г.* Сетевое планирование и управление в строительстве: Учеб. пособие. — М.: Стройиздат, 1972. — 288 с.
- 7 *Холод Н.И., Кузнецов А.В., Жихар Я.Н. и др.* Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие. — Минск: Изд. БГЭУ, 1999. — 413 с.
- 8 *Мельник М.М.* Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении материально-техническим снабжением: Учебник. — М.: Высш. шк., 1990. — 208 с.
- 9 *Васильева Л.Н., Муравьева Е.А.* Методы управления инновационной деятельностью: Учеб. пособие. — М.: КНОРУС, 2005. — 320 с.
- 10 Управление проектом. Основы проектного управления: Учебник / Под ред. М.Л. Разу. — М.: КНОРУС, 2006. — С. 301.
- 11 *Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И.* Математические методы и модели в планировании: Учеб. пособие. — М.: Экономика, 1987. — С. 172.

Р.С.Каренов

Желілік графікті талдау және оңтайландыру әдістемесі

Желілік график құрылып және оның негізгі көрсеткіштері есептелгеннен кейін оны оңтайландыруға кірісетіндігі баяндалған. Оңтайландыру деп уақыт пен ресурстар бойынша берілген параметрлердің және нәтижелердің барынша жоғары көрсеткіштеріне қол жеткізу үшін желіге бірізділікпен түзетулер енгізуді түсіну қажеттігі негізделген. Желілік графікті уақыт тұрғысынан оңтайландыру дегеніміз — жұмыс кешендерінің директивті уақытта аяқталу мерзіміне сәйкес оның сындарлы жолын қысқарту. Желілік графікті уақыт тұрғысынан оңтайландыруға қол жеткізетін іс-шаралар жүйесі қарастырылған. Желілік графікті оңтайландыруға көп нұсқалы есептеулер электронды-есептеуші машиналар көмегімен атқарылу қажеттігі дәлелденген. Желілік графікті ресурстар тұрғысынан оңтайландырудың әдістемелік негіздері ашылған. Желілік графікті уақыт және құн бойынша оңтайландыруға көңіл бөлінген.

R.S.Karenov

Methods of analysis and optimization of network schedule

It is noted that after the network schedule is constructed and its main indicators are calculated, start its optimization. It is proved that it is necessary to understand optimization as consistent correction network for achievement the most effective results and set parameters on time and resources. It is proved that optimization of the network schedule on time is a reducing its critical path according to directive dates of termination of a complex of works. The system of measures through which optimization of the network schedule on time can be reached is considered. It is concluded that the multivariate recalculations of the network schedule for its optimization advisable to carry out a ECM (Electronic Computing Machines). Optimization methodical bases of network schedule on resources are provided. It is raised optimization of network schedules on time and cost.

References

- 1 Bolshakov A.S. *Modeling in management: the manual book*, Moscow: «Filin» information Publ. House, Rilant, 2000, p. 464.
- 2 Fedoseyev V.V., Garmash A.N., Dayitbegov D.M., etc. *Economic-mathematical methods and applied sciences: The manual book*, Moscow: YUNITI, 1999, p. 394.

- 3 Razumov E.M., Belova L.D., Epatov M.E., Proskuryakov A.V. *Network graphs in planning: the manual book*, Moscow: High School, 1981, p. 168.
- 4 Ahyudzha H. *Network methods of management in designing and production* / Transl. from Engl., Moscow: Mir, 1979, p. 639.
- 5 Terekhov L.L., Kutsenko V.A., Sidnev S.P. *Economic-mathematical methods and models in planning and management*, Kiev: Vishcha school, 1987, p. 231.
- 6 Borozdin E.G. *Network planning and management in construction: The manual book*, Moscow: Stroyizdat, 1972, p. 288.
- 7 Kholod N.E., Kuznetsov A.V., Zhikhar Y.N., etc. *Economic-mathematical methods and models: The manual book*, Minsk: BGEU, 1999, p. 413.
- 8 Melnik M.M. *Economic-mathematical methods and models in planning and inventory management: Textbook*, Moscow: High school, 1990, p. 208.
- 9 Vasilyeva L.N., Muravyeva E.A. *Methods of control innovative activities: the manual book*, Moscow: KNORUS, 2005, p. 320.
- 10 Upravlenie proektom. *Project management. Bases of project management: Textbook* / Under the M.L.Razu's editorship, Moscow: KNORUS, 2006, p. 301.
- 11 Karasev A.E., Kremer N.S., Savelyeva T.E. *Mathematical methods and models in planning: The manual book*, Moscow: Economics, 1987, p. 172.

УДК 519.683.85

М.М.Букенов, А.Н.Москаленко

Каргандинский государственный университет им. Е.А.Букедова (E-mail: crasy_bee89@mail.ru)

Численная реализация алгоритма для динамической задачи теории упругости

Авторами реализован алгоритм решения трёхмерной динамической задачи теории упругости «в скоростях-напряжениях», использующий расщепление оператора Ламе. Рассмотрена сеточная задача «в скоростях-напряжениях» в трёхмерном случае, где доказаны теорема аддитивности схем и теорема о консервативности схем. Трёхмерная динамическая задача теории упругости в «скоростях-напряжениях» решена с помощью метода прогонки, алгоритм реализован на языке программирования Delphi 7.0 с построением графиков функций тестового и приближённого решений на сетках различной точности. Целью авторов было реализовать алгоритм решения трёхмерной динамической задачи теории упругости «в скоростях-напряжениях» и сравнить тестовое и приближённое решения при расчётах с различной степенью точности. Цель полностью достигнута.

Ключевые слова: алгоритм решения трёхмерной динамической задачи, расщепление оператора Ламе, сеточная задача «в скоростях-напряжениях», трёхмерная задача «в скоростях-напряжениях», метод прогонки, гильбертово пространство, ковариантное дифференцирование, аддитивное разложение, разностная схема, сеточный закон сохранения.

1. Сеточная задача «в скоростях-напряжениях». Ради некоторых упрощений в обозначениях мы положим $f = 0$ и рассмотрим трёхмерный случай. Тогда

$$R = \begin{pmatrix} \nabla_1 & 0 & 0 & \nabla_2 & \nabla_3 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & 0 & \nabla_1 & 0 & \nabla_3 \\ 0 & 0 & \nabla_3 & 0 & \nabla_1 & \nabla_2 \end{pmatrix}^T; \quad (1.1)$$

$$R = - \begin{pmatrix} \nabla_1 & 0 & 0 & \nabla_2 & \nabla_3 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & 0 & \nabla_1 & 0 & \nabla_3 \\ 0 & 0 & \nabla_3 & 0 & \nabla_1 & \nabla_2 \end{pmatrix}.$$

В декартовой $\left(\nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial y_i}\right)$ и цилиндрической системах координат разностные схемы для поста-

новки «в скоростях-напряжениях» впервые, по-видимому, рассматривались в [1]. В декартовой системе координат, начиная с [2] (см. также [3–5]), (2.20, ч. I), приводится к симметрической t -гиперболической, по Фридриху, системе