УДК 517.968.2

Ж.Х. Жунусова

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
(E-mail: zhzhkh@mail.ru)

Построение поверхности к сингулярному односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера

Одной из актуальных задач математики является исследование нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Исследование в данном направлении очень важно, так как результаты находят теоретическое и практическое применение. Существуют различные подходы к решению данных уравнений. Методы теории солитонов позволяют построить решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Одним из методов решения указанных выше уравнений является метод обратной задачи рассеяния. Цель данной работы — построение поверхности, соответствующей сингулярному односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера с притяжением в (1+1)-размерности. Автором рассмотрено построение поверхности в (1+1)-размерности в смысле Фокаса-Гельфанда. Согласно данному подходу в (1+1)-мерном случае нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных даются в виде условий нулевой кривизны и являются условием совместности системы линейных уравнений. В этом случае существует поверхность с иммерсионной функцией. Поверхность, определенная посредством иммерсионной функции, идентифицируется с поверхностью в трехмерном пространстве. С помощью солитонной иммерсии для сингулярного односолитонного решения нелинейного уравнения Шредингера найдена поверхность с соответствующими коэффициентами первой квадратичной формы.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, поверхность, солитонное решение, фундаментальная форма, условие нулевой кривизны.

1 Введение

Некоторые нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных являются интегрируемыми, допускают физически интересные точные решения, более того, эти интегрируемые уравнения разрешимы методом обратной задачи рассеяния [1-6]. Исследование интегрируемых уравнений в (1+1)-, (2+1)-измерениях являются актуальными с точки зрения математической физики [2-5]. Интегрируемые уравнения допускают различные виды решений: односолитонное решение, решение доменной стенки, вихревое решение и т.д. Более того, решения интегрируемых уравнений имеют геометрические характеристики. Для исследования геометрических свойств решений применяется теория дифференциальной геометрии кривых и поверхностей.

Одной из известных моделей является модель ферромагнетика Гейзенберга

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times \mathbf{S}_{xx},$$

где $\times$ — векторное произведение; $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$; $\mathbf{S} = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$.

Лакшмананом установлено, что данная модель при $\mathbf{S}^2 = +1$ эквивалентна в геометрическом смысле нелинейному уравнению Шредингера с притяжением, которое важно для физических приложений. Эту эквивалентность называют лакшманановой. Отметим, что лакшмананова эквивалентность разработана не только для интегрируемых, но и для неинтегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, и ее область применимости по определению ограничена установлением эквивалентности спиновой системы и некоторого нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, например, шредингеровского типа. Заметим, что для интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных лакшмананова эквивалентность не предполагает знания представления Лакса рассматриваемых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

На сегодня известны обобщения рассмотренной выше модели ферромагнетика Гейзенберга в (2+1)-измерениях. Например, в работе [5] рассмотрена обобщенная модель ферромагнетика Гейзенберга следующего вида:

$$\mathbf{S}_t = (\mathbf{S} \times \mathbf{S}_y + u\mathbf{S})_x;$$

$$u_x = -(\mathbf{S}, (\mathbf{S}_x \times \mathbf{S}_y)),$$

где $\mathbf{S}$ — спин-вектор, $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$; $\times$ — векторное произведение; u — скалярная функция. Мы отождествляем спин-вектор $\mathbf{S}$ с вектором $\mathbf{r}_x$ согласно работе [2]:

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{r}_x.$$

Тогда обобщенная модель ферромагнетика Гейзенберга принимает вид

$$\mathbf{r}_{xt} = (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_{xy} + u\mathbf{r}_x)_x;$$

$$u_x = -(\mathbf{r}_x, (\mathbf{r}_{xx} \times \mathbf{r}_{xy})).$$

Таким образом, единый спиновый подход используется для исследования геометрических характеристик решения нелинейного уравнения.

В данной работе мы рассматриваем построение поверхности в (1+1)-мерном пространстве в смысле Фокаса-Гельфанда [3].

2 Построение поверхности в смысле Фокаса-Гельфанда

Согласно работе Фокаса-Гельфанда [3] приведем построение солитонной поверхности. В (1+1)-мерном случае нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных даются в виде условий нулевой кривизны:

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \tag{1}$$

где $[U, V] = UV - VU$, матрица U задана, а матрица V выражается в терминах элементов матрицы U.

Одной из хорошо известных моделей является нелинейное уравнение Шредингера, которое важно для физических приложений,

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2\beta|\psi|^2\psi = 0, \tag{2}$$

где $\beta = +1$, ψ является комплексной функцией.

Также нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных (1) являются условием совместности системы линейных уравнений:

$$\phi_x = U\phi, \phi_t = V\phi. \tag{3}$$

В этом случае существует поверхность с иммерсионной функцией $P(x,t)$, определяемая следующими формулами: $\frac{\partial P}{\partial x} = \phi^{-1}X\phi, \frac{\partial P}{\partial t} = \phi^{-1}Y\phi$. Поверхность, определенная посредством $P(x,t)$, идентифицируется с поверхностью в трехмерном пространстве, определенной координатами $x_j = P_j(x,t),\ j = 1,2,3$. Репер на поверхности дается тройкой [3]:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \phi^{-1}X\phi, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \phi^{-1}Y\phi, \quad N = \phi^{-1}J\phi,$$

где $J = \frac{[X,Y]}{|[X,Y]|}, \quad |X| = \sqrt{<X,X>}$. Здесь по определению

$$<X, Y> = -\frac{1}{2}tr(XY),$$

где X, Y являются некоторыми матрицами. Первая и вторая фундаментальные формы в смысле Фокаса-Гельфанда даются как

$$I = <X,X> dx^2 + 2 <X,Y> dxdt + <Y,Y> dt^2; \tag{4}$$

$$II = <\frac{\partial X}{\partial x} + [X,U], J> dx^2 + 2 <\frac{\partial X}{\partial t} + [X,V], J> dxdt + <\frac{\partial Y}{\partial t} + [Y,V], J> dt^2. \tag{5}$$

Как показано в работе [3], функция иммерсии P может быть определена как

$$P = \gamma_0 \phi^{-1}\phi_\lambda + \phi^{-1} M_1 \phi = \sum_{j=1}^{3} P_j f_j,$$

где M_1 является матричной функцией, определенной по λ, x, t. Здесь $f_j = -\frac{i}{2}\sigma_j$ является базисом соответствующей алгебры, σ_j матрицы Паули и $[f_i, f_j] = f_k$. В этом случае X, Y можно записать как

$$X = \gamma_0 U_\lambda + M_{1x} + [M_1, U], Y = \gamma_0 V_\lambda + M_{1t} + [M_1, V].$$

Пусть матрицы X, Y, J имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В этом случае элементы матрицы J выражаются через элементы матрицы X и Y в соответствии со следующими формулами:

$$c_{11} = \frac{a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21}}{|\,[X,Y]\,|}; \quad c_{21} = \frac{a_{21}(b_{11} - b_{22}) + b_{21}(a_{22} - a_{11})}{|\,[X,Y]\,|};$$

$$c_{12} = \frac{b_{12}(a_{11} - a_{22}) + a_{12}(b_{22} - b_{11})}{|\,[X,Y]\,|}, \quad c_{22} = \frac{a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12}}{|\,[X,Y]\,|}. \tag{7}$$

Тогда первая фундаментальная форма (4) двухмерной поверхности будет $I = Edx^2 + 2Fdxdt + Gdt^2$, где

$$E = -\frac{1}{2}(a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{22}^2), \quad F = -\frac{1}{2}(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}); \tag{8}$$

$$G = -\frac{1}{2}(b_{11}^2 + 2b_{12}b_{21} + b_{22}^2). \tag{9}$$

В качестве примера солитонного уравнения, приводящего к такой иммерсии, рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера (2). В этом случае матрицы U, V имеют вид [4]

$$U = \frac{\lambda\sigma_3}{2i} + U_0, \ U_0 = i\begin{pmatrix} 0 & \bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix};$$

$$V = \frac{i\lambda^2}{2}\sigma_3 + i|q|^2\sigma_3 - i\lambda\begin{pmatrix} 0 & \bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \bar{q}_x \\ -q_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Справедлива следующая.

Лемма. Вторая фундаментальная форма в смысле Фокаса-Гельфанда, соответствующая сингулярному односолитонному решению q нелинейного уравнения Шредингера, имеет вид

$$II = Ldx^2 + 2Mdxdt + Ndt^2, \tag{11}$$

где

$$L = -\frac{1}{2}\{a_{11x}c_{11} + a_{12x}c_{21} + a_{21x}c_{12} + a_{22x}c_{22} - \lambda i(a_{21}c_{12} - a_{12}c_{21}) +$$
$$+ iq(a_{12}c_{11} + a_{22}c_{12} - a_{11}c_{12} - a_{12}c_{22}) + i\bar{q}(a_{21}c_{22} + a_{11}c_{21} - a_{22}c_{21} - a_{21}c_{11})\}; \tag{12a}$$

$$M = -\frac{1}{2}\{a_{11t}c_{11} + a_{12t}c_{21} + a_{21t}c_{12} + a_{22t}c_{22} + i(\lambda^2 + 2|q|^2)(a_{21}c_{12} - a_{12}c_{21}) +$$
$$+ (q_x + \lambda iq)(a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} - a_{12}c_{11} - a_{22}c_{12}) +$$
$$+ (\bar{q}_x - \lambda i\bar{q})(a_{11}c_{21} + a_{21}c_{22} - a_{21}c_{11} - a_{22}c_{21})\}; \tag{12b}$$

$$N = -\frac{1}{2}\{b_{11t}c_{11} + b_{12t}c_{21} + b_{21t}c_{12} + b_{22t}c_{22} + i(\lambda^2 + 2|q|^2)(b_{21}c_{12} - b_{12}c_{21}) +$$
$$+ (q_x + \lambda iq)(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} - b_{12}c_{11} - b_{22}c_{12}) +$$
$$+ (\bar{q}_x - \lambda i\bar{q})(b_{11}c_{21} + b_{21}c_{22} - b_{21}c_{11} - b_{22}c_{21})\}. \tag{12c}$$

Доказательство. Подставляем матрицы (6), (10) в (5). После некоторых вычислений получим (11), (12a)–(12c). Лемма доказана.

3 Теорема о поверхности, соответствующей сингулярному односолитонному решению

Рассмотрим частный случай иммерсии при $\gamma_0 = 1, \quad M_1 = 0$. В данном случае имеем

$$X = U_\lambda = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = V_\lambda = -i\begin{pmatrix} -\lambda & \bar{q} \\ q & \lambda \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\bar{q}}{\sqrt{q\bar{q}}} \\ \frac{q}{\sqrt{q\bar{q}}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

и $P = \phi^{-1}\phi_\lambda$. Чтобы вычислить явные выражения для функций иммерсии P, рассмотрим сингулярное односолитонное решение нелинейного уравнения Шредингера, которое имеет вид [4]

$$q(x,t) = 2\eta\frac{exp(-2i\xi x - 4i(\xi^2-\eta^2)t - i\delta)}{sh[2\eta(x+4\xi t - x_0)]}, \tag{14}$$

где $x_0 = \frac{1}{2\eta}ln|\frac{m_{02}}{m_{01}}|$, $\delta = argm_{02} - argm_{01}$, $\xi = Re\lambda$, $\eta = Im\lambda$.

Теорема. Сингулярному односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера соответствует поверхность в смысле Фокаса-Гельфанда со следующими коэффициентами первой фундаментальной формы:

$$E = \frac{64\eta^2}{(\lambda-\bar{\lambda})^4 sh^4[2\eta(x+4\xi t-x_0)]}(2\eta^2 + (\xi^2+\eta^2)sh^2[2\eta(x+4\xi t - x_0)]); \tag{15a}$$

$$\begin{gathered} F = \frac{128\eta^2}{(\lambda-\bar{\lambda})^4 sh^4[2\eta(x+4\xi t-x_0)]}(\xi(\xi^2-\eta^2)sh^2[2\eta(x+4\xi t-x_0)] + \\ +2\xi\eta^2 ch^2[2\eta(x+4\xi t-x_0)])(cos^2(2\xi x + 4(\xi^2-\eta^2)t+\delta) - sin^2(2\xi x+4(\xi^2-\eta^2)t+\delta) + \\ +(6\eta\xi^2 - 2\eta^3)cos(2\xi x+4(\xi^2-\eta^2)t+\delta)sin(2\xi x+4(\xi^2-\eta^2)t+\delta)\times \\ \times sh[2\eta(x+4\xi t-x_0)]ch[2\eta(x+4\xi t-x_0)] + 2\eta\xi; \end{gathered} \tag{15b}$$

$$\begin{gathered} G = \frac{256\eta^2}{(\lambda-\bar{\lambda})^4 sh^4[2\eta(x+4\xi t-x_0)]}((\xi^2-\eta^2)^2 sh^2[2\eta(x+4\xi t-x_0)] + \\ +4\xi^2\eta^2 ch^2[2\eta(x+4\xi t-x_0)] + 4\xi^2\eta^2), \end{gathered} \tag{15c}$$

где $\lambda_1 = const$.

Доказательство. Решение линейной системы найдем в виде

$$\psi = \phi e^{-(\frac{\lambda\sigma_3}{2i}x + \frac{i\lambda^2}{2}\sigma_3 t)}. \tag{16}$$

Учитывая (16) и применяя (10), имеем

$$\psi_x = (\frac{\lambda\sigma_3}{2i} + U_0)\psi - \psi\frac{\lambda\sigma_3}{2i} = \frac{\lambda\sigma_3}{2i}\psi - \psi\frac{\lambda\sigma_3}{2i} + U_0\psi = [\frac{\lambda\sigma_3}{2i}, \psi] + U_0\psi. \tag{17}$$

Возьмем

$$\psi = I - \frac{\tilde{A}}{\lambda-\lambda_1^*}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1^* - const. \tag{18}$$

Подставим (18) в (17):

$$\psi_x = U_0 - \frac{U_0\tilde{A}}{\lambda-\lambda_1^*} - \frac{1}{2i}[\sigma_3, \tilde{A}] - \frac{\lambda_1^*}{2i(\lambda-\lambda_1^*)}[\sigma_3, \tilde{A}]. \tag{19}$$

С другой стороны, из (18) следует

$$\psi_x = -\frac{\tilde{A}_x}{\lambda-\lambda_1^*}. \tag{20}$$

Из (19) и (20) имеем

$$-\frac{\tilde{A}_x}{\lambda-\lambda_1^*} = U_0 - \frac{U_0\tilde{A}}{\lambda-\lambda_1^*} - \frac{1}{2i}[\sigma_3, \tilde{A}] - \frac{\lambda_1^*}{2i(\lambda-\lambda_1^*)}[\sigma_3, \tilde{A}]. \tag{21}$$

Таким образом,

$$\tilde{A}_x = U_0\tilde{A} + \frac{\lambda_1^*}{2i}[\sigma_3, \tilde{A}], U_0 = \frac{1}{2i}[\sigma_3, A]. \tag{22}$$

Заметим, что
$$[\sigma_3, \tilde{A}] = \sigma_3\tilde{A} - \tilde{A}\sigma_3 = 2\begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ -\tilde{c} & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Затем, подставляя (23) в (7), получим
$$U_0 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ -\tilde{c} & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Подставляя (23) в (22), имеем
$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_x & \tilde{b}_x \\ \tilde{c}_x & \tilde{d}_x \end{pmatrix} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} \tilde{b}\tilde{c} & \tilde{b}\tilde{d} \\ -\tilde{c}\tilde{a} & -\tilde{c}\tilde{b} \end{pmatrix} + \frac{\lambda_1^*}{i}\begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ -\tilde{c} & 0 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

Из (10) и (24) получим
$$i\begin{pmatrix} 0 & \bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i\bar{q} = \frac{1}{i}b \\ iq = -\frac{1}{i}c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\bar{q} \\ c = q. \end{cases} \tag{26}$$

Таким образом, мы нашли матрицу $\tilde{A}$ в явном виде с компонентами (25). Используя (14), получим
$$\tilde{a} = i2\eta cth[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + c_1. \tag{27}$$

Из (25) следует $\tilde{a} = -\frac{i\tilde{c}_x}{c} - \lambda_1^* \Rightarrow \tilde{a} = -\frac{1}{i}\int \bar{q}q dx$. Используя (14), получим
$$\tilde{a}_x = \frac{1}{i}\tilde{b}\tilde{c} \Rightarrow \tilde{a}_x = \frac{1}{i}(-\bar{q})q, \tag{28}$$

Тогда
$$\tilde{a} = -\frac{iq_x}{q} - \lambda_1^*. \tag{29}$$

Следовательно, из (25), (26) имеем
$$\tilde{d} = \frac{i\tilde{b}_x}{\tilde{b}} - \lambda_1^* \Rightarrow \tilde{d} = \frac{i(-\bar{q})_x}{(-\bar{q})} - \lambda_1^* \Rightarrow \tilde{d} = \frac{i\bar{q}_x}{\bar{q}} - \lambda_1^*. \tag{30}$$

Из (25), (26) следует
$$\tilde{d}_x = -\frac{1}{i}\tilde{c}\tilde{b}, \tag{31}$$

Более того, из (23), (31) следует
$$\tilde{d} = \frac{1}{i}\int q\bar{q}dx \tag{32}$$

Учитывая (22), получим (28) в виде
$$\tilde{d} = -\tilde{a}. \tag{33}$$

Следовательно,
$$\tilde{a} = -i2\eta cth[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + c_1. \tag{34}$$

Таким образом, матрица $\tilde{A}$ для сингулярного односолитонного решения (14) нелинейного уравнения Шредингера принимает вид
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} i2\eta cth[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + c_1 & -2\eta\frac{exp\{i(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta)\}}{sh[2\eta(x - x_0 + 4\xi t)]} \\ 2\eta\frac{exp\{-i(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta)\}}{sh[2\eta(x - x_0 + 4\xi t)]} & -i2\eta cth[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + c_1 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Далее возьмем $\phi = I - \frac{A}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}$, где λ_1 является постоянной, тогда из (13) имеем
$$P = \phi^{-1}\phi_\lambda = (I + \frac{\tilde{A}}{\lambda - \lambda_1})\frac{\tilde{A}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}. \tag{36}$$

С другой стороны, получим

$$P = \sum_{j=1}^{3} P_j f_j = -\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{3} P_j \sigma_j = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}P_3 & -\frac{i}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_2 \\ -\frac{i}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 & \frac{i}{2}P_3 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Из (36), (37) посредством (31) имеем $P_3 = \dfrac{2i\tilde{a}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}$. Теперь с помощью (33) найдем P_3 в явном виде для сингулярного односолитонного решения нелинейного уравнения Шредингера:

$$P_3 = -\frac{4\eta}{(\lambda - \bar{\lambda})^2} cth[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + \frac{2ic_1}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)}. \tag{38}$$

Из (36), (37) имеем $P_2 = \frac{\tilde{c} - \tilde{b}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}$. Таким образом,

$$P_1 = \frac{i(\tilde{c} + \tilde{b})}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}, \quad P_2 = \frac{(\tilde{c} - \tilde{b})}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}, \quad P_3 = \frac{2i\tilde{a}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}.$$

Из (36), (14), используя известные формулы

$$sh\zeta = \frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{2};\ ch\zeta = \frac{e^{\zeta} + e^{-\zeta}}{2};\ cos\zeta = \frac{e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}}{2};\ sin\zeta = \frac{e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}}{2i}, \tag{39}$$

где $\zeta = 2\eta(x - x_0 + 4\xi t)$, получим явные значения для компонентов P_1, P_2 матрицы P:

$$P_1 = -\frac{4i\eta sin(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta)}{(\lambda - \bar{\lambda})^2 sh[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}, \tag{40a}$$

$$P_2 = \frac{4\eta cos(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta)}{(\lambda - \bar{\lambda})^2 sh[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}. \tag{40b}$$

Теперь вычислим коэффициенты первой фундаментальной формы, т.е.

$$E = P_{1x}^2 + P_{2x}^2 + P_{3x}^2. \tag{41}$$

Для этого вычислим P_{1x}, P_{2x}, P_{3x}. Возводим в квадрат первые производные и подставим в (41), тогда

$$E = \frac{64\eta^2}{(\lambda - \bar{\lambda})^4 sh^4[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}(2\eta^2 + (\xi^2 + \eta^2)sh^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]).$$

Подобным образом, согласно формулам

$$F = P_{1x}P_{1t} + P_{2x}P_{2t} + P_{3x}P_{3t}, \quad G = P_{1t}^2 + P_{2t}^2 + P_{3t}^2,$$

получим значения

$$F = \frac{128\eta^2}{(\lambda - \bar{\lambda})^4 sh^4[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}(\xi(\xi^2 - \eta^2)sh^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] +$$
$$+2\xi\eta^2 ch^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)])(cos^2(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta) - sin^2(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta) +$$
$$+(6\eta\xi^2 - 2\eta^3)cos(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta)sin(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta)\times$$
$$\times sh[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]ch[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + 2\eta\xi);$$

$$G = \frac{256\eta^2}{(\lambda - \bar{\lambda})^4 sh^4[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}((\xi^2 - \eta^2)^2 sh^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] +$$
$$+4\xi^2\eta^2 ch^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + 4\xi^2\eta^2).$$

Теорема доказана.

4 Заключение

Таким образом, мы исследовали построение поверхности в смысле Фокаса-Гельфанда в (1+1)-измерении. В качестве примера рассмотрели (1+1)-мерное нелинейное уравнение Шредингера с притяжением. Найдена первая фундаментальная форма с соответствующими коэффициентами (15) для интегрируемой поверхности, соответствующей сингулярному односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера с притяжением. Для нахождения поверхности применены подход Фокаса-Гельфанда и теория дифференциальной геометрии поверхностей.

Список литературы

1 Ablowitz M.J. Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering / M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson. — Cambridge: Cambridge University Press, 1992. — 516 p.

2 Myrzakulov R. A (2+1)-dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterparts, solitons and localized coherent structures / R.Myrzakulov, S.Vijayalakshmi et all. // J. Phys. Lett. A. — 1997. — No. 233A. — P. 391–396.

3 Ceyhan O. Deformations of surfaces associated with integrable Gauss-Mainardi-Codazzi equations / O.Ceyhan, A.S.Fokas, M.Gurses // J. Math. Phys. — 2000. — No. 4. — P. 2551–2270.

4 Маханьков В.Г. Задача Римана на плоскости и нелинейное уравнение Шредингера / В.Г.Маханьков, Р.Мырзакулов // В кн. «Сообщения Объединенного института ядерных исследований» Р5-84-742. — Дубна, 1984. — С. 6.

5 Zhunussova Zh. Geometrical features of the soliton solution / Zh.Zhunussova // Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Springer, Series: Trends in Mathematics. — 2015. — P. 671–677.

6 Zhunussova Zh. Reconstruction of surface corresponding to domain wall solution / Zh.Zhunussova // Proceeding of the forth International conference «Modern problems of Applied mathematics and information technologies». — Samarkand: Al-Khorezmiy, 2014. — P. 283.

Ж.Х. Жүнісова

Сызықты емес Шредингер теңдеуінің сингулярлы бірсолитондық шешіміне сәйкес бет құру

Сызықты емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді зерттеу — математиканың өзекті проблемаларының бірі. Нәтижелердің теориялық және практикалық қолданысы болғандықтан, бұл бағыттағы зерттеулер маңызды. Бұл теңдеулерді шешу үшін әртүрлі әдістер бар. Сызықты емес дербес туындылы теңдеулердің шешімін солитондар теориясы әдістерін қолданып табуға болады. Кері сейілу әдісі — айтылған теңдеулерді шешуге арналған әдістердің бірі. Жұмыстың мақсаты — (1+1)-өлшемдегі сызықты емес, Шредингер теңдеуінің сингулярлық бір солитондық шешіміне сәйкес бет құру. Мақалада (1+1)-өлшемде Фокас-Гельфанд мағынасындағы бетті құру қарастырылған. (1+1)-өлшемде сызықты емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер нөлдік қисықтық шарты арқылы беріледі және сызықты теңдеулердің шарты болып табылады. Бұл жағдайда иммерсиялық функциясы бар бет табылады. Иммерсиялық функциясы арқылы анықталған бет үш өлшемді кеңістіктегі бетпен сәйкестендіріледі. Сызықты емес Шредингер теңдеуінің сингулярлық бір солитондық шешіміне сәйкес бірінші квадраттық форманың коэффициенттерімен берілген бет солитондық иммерсия арқылы құрылады.

Кілт сөздер: сызықты емес теңдеу, бет, солитондық шешім, фундаменталдық форма, нөлдік қисықтық шарты.

Zh.Kh. Zhunussova

The surface to singular solitonic solution of the nonlinear Schrodinger equation

One of the topical problems of mathematics is studying of nonlinear differential equations in partial derivatives. Investigation in this area is important, since the results get the theoretical and practical applications. There are some different approaches for solving of the equations. Methods of the theory of solitons allow to construct the solutions of the nonlinear differential equations in partial derivatives. One of the methods for solving of the equations is the inverse scattering method. The aim of the work is to construct a surface corresponding to a singular onesolitonic solution of the nonlinear Schrodinger equation with gravity in (1+1)-dimensions. In this work the construction of the surface in (1+1)-dimensions in Fokas-Gelfand sense is considered. According to the approach the nonlinear differential equations in (1+1)-dimension are given in the form of zero curvature condition and are compatibility condition of the linear system equations. In this case there is a surface with immersion function. The surface defined by the immersion function is identified to the surface in three-dimensional space. Surface with coefficients of the first fundamental form corresponding to the singular onesolitonic solution of the nonlinear Schrodinger equation is found by soliton immersion.

Keywords: nonlinear equation, surface, solitonic solution, fundamental form, zero curvature condition.

References

1 Ablowitz, M.J. & Clarkson, P.A. (1992). Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press.

2 Myrzakulov, R., Vijayalakshmi, S. & et all. (1997). A (2+1)-dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterparts, solitons and localized coherent structures. *J. Phys. Lett. A., 233A,* 391–396.

3 Ceyhan, O., Fokas, A.S. & Gurses, M. (2000). Deformations of surfaces associated with integrable Gauss-Mainardi-Codazzi equations. *J. Math. Phys., 4,* 2551–2270.

4 Makhankov, V.G. & Myrzakuov, R. (1984). Zadacha Rimana na ploskosti i nelineinoe uravnenie Shredinhera [Riemann Problem on a Plane and Nonlinear Schroedinger Equation]. *V knihe «Soobshcheniia Obieedinennoho instituta iadernykh issledovanii» P5-84-742 – In book «Communication of the Joint Institute for Nuclear Research» P5-84-742.* Dubna [in Russian].

5 Zhunussova, Zh. (2015). Geometrical features of the soliton solution. *Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Springer, Series: Trends in Mathematics,* 671–677.

6 Zhunussova, Zh. (2014). Reconstruction of surface corresponding to domain wall solution. *Proceeding of the forth International conference «Modern problems of Applied mathematics and information technologies, 283.* Samarkand: Al-Khorezmiy.