ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ВЛОЖЕНИЯ КЛАССОВ ТИПА МОРРИ

Монтай А.О.
Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана
E-mail: askhat.93@list.ru

Пусть даны целые положительные числа s и $r_j\,(j=1,...,s)$, положительные числа $\aleph_j\,(j=1,...,s)$, $1\le p<\infty$ и положительная неубывающая на $(0,1]$ функция $\Phi(\delta)$.

Определим множество параллелепипедов $T_{\aleph_1,...,\aleph_s}$,

$$T_{\aleph}=T_{\aleph_1,...,\aleph_s}=\left\{I_{\vartheta^{\aleph}}(y)=\prod_{j=1}^{s}\left[y_j-\frac{1}{2}\vartheta^{\aleph_j},y_j+\frac{1}{2}\vartheta^{\aleph_j}\right]\subset[0,1]^s:0<y_j<1(j=1,...,s),\quad 0<\vartheta\le 1\right\}$$

и соответствующую ей норму

$$\|\varphi\|_{p,\Phi,T_{\aleph}}\equiv\|\varphi\|_{p,\Phi,T_{\aleph_1,...,\aleph_s}}\equiv\|\varphi\|_{p,\Phi,\aleph_1,...,\aleph_s}\equiv\sup_{E\in T_{\aleph}}\frac{1}{\Phi(|\mathrm{E}|)}\left(\int_E|\varphi(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $|\mathrm{E}|$ есть лебегова мера множества E.

Тогда классом Соболева-Морри $W^{r_1,...,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,...,\aleph_s}(0,1)^s$ назовем множество, состоящее из всех измеримых на $[0,1]^s$ функций $f(x)$, для каждой из которых

$$\|f\|_{W^{r_1,...,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,...,\aleph_s}}\equiv\|f\|_{p,\Phi,\aleph_1,...,\aleph_s}+\sum_{j=1}^{s}\left\|D^{r_j}_{x_j}f\right\|_{p,\Phi,\aleph_1,...,\aleph_s}\le 1,$$

где $D^{r_j}_{x_j}f$ - обобщенная производная порядка r_j по переменной x_j.

Класс $W^{r_1,...,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,...,\aleph_s}(0,1)^s$ в случае $r_1=...=r_s=r,\aleph_1=...=\aleph_s$ обозначим через $W^{r}_{p,\Phi,T}(0,1)^s$, где T есть семейство всех s-мерных кубов из $(0,1)^s$, стороны которых параллельны осям координат.

Ясно, что при $\Phi(\delta)\equiv 1$ классы $W^{r_1,...,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,...,\aleph_s}\equiv W^{r_1,...,r_s}_{p,1,\aleph_1,...,\aleph_s}$ сводятся к соответствующим пространствам Соболева $W^{r_1,...,r_s}_{p}(0,1)^s$. Для степенных функций $\Phi(\delta)$ классы $W^{r}_{p,\Phi,T}$ впервые были изучены Морри [1]. Исследования Ч. Морри 1938 года [1] получили продолжение в работах Греко, Ниренберга, Компанато, Бароцци, В.П. Ильина, Росса, Ю.В. Нетрусова и др. (см. §27 в [2]). К.Ж. Наурызбаевым и Г.Т. Джумакаевой в первой половине 80-ых годов XX века был сделан новый шаг – переход от степенного $\Phi(\delta)=\delta^{\beta}$ к произвольному случаю [3-4].

В данной работе получены необходимое и достаточное условия для вложения $W^{r}_{p,\delta^{\beta},T}(0,1)^s\subset L^q(0,1)^s$ в степенном $\Phi(\delta)=\delta^{\beta}(\beta>0)$ случае при $\frac{r}{s}<\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, $1\le p\le\frac{q}{\left(1+\sqrt{q}\right)}$.

Список использованных источников

1. *Morrey C.B.* On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations // Transactions of the American Mathematical Society. №43. 1938. P. 126-166.

2. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.

3. *Джумакаева Г.Т.* Критерий вложения класса Соболева - Морри $W^{1}_{p,\Phi}$ в пространство C // Математические заметки. Т. 37. № 3. 1985. С. 399-406.

4. *Джумакаева Г.Т., Наурызбаев К.Ж.* О пространствах Лебега – Морри // Известия АН Казахской ССР, серия физико-математическая. № 5. 1982. С. 7-12 .