УДК 517.957

Г.Н. Нугманова, Ж.М. Сагидуллаева

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
(E-mail: sagidullayeva.zh@gmail.com)

Обобщенная спиновая модель с векторным потенциалом и ее решение

В статье исследовано интегрируемое обобщение уравнения Ландау-Лифшица с самосогласованным векторным потенциалом. Установлено, что самосогласованность спинового вектора и потенциала осуществляется связью между решениями потенциала и линейной системы, условие совместности которых соответствует рассматриваемому нами уравнению. Обобщая метод Хироты, построено его точное решение, описывающее самосогласованное движение потенциала и солитона.

Ключевые слова: спиновые модели, метод Хироты, солитонные решения, интегрируемые нелинейные дифференциальные уравнения, уравнение Ландау-Лифшица, движение потенциала.

Введение

Решения интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений, представляющие собой уединенную волну и обладающие свойством упругости взаимодействия с другим таким же решением, имеют различные приложения во многих областях естественных наук. Аналитические исследования процессов взаимодействия уединенных волн являются одними из основных задач теории солитонов. Развитие нелинейной теории магнетизма, в свою очередь, поставило проблему построения интегрируемых обобщений уравнения Ландау-Лифшица с самосогласованным потенциалом. Одно из таких обобщений с самосогласованным скалярным потенциалом было предложено в [1]. Различные алгебро-геометрические аспекты таких моделей изучены в работах [2–5]. Обобщенные уравнения Ландау-Лифшица (ОУЛЛ) с самосогласованным векторным потенциалом (СВП) получены в работе [6], а также установлены их связи с движением кривых и поверхностей.

Обобщенное уравнение Ландау-Лифшица

Обобщенное уравнение Ландау-Лифшица с самосогласованным векторным потенциалом имеет вид

$$S_t + 0.5S \wedge S_{xx} + \frac{2}{a} S \wedge W = 0; \tag{1}$$

$$W_x + 2aS \wedge W = 0, \tag{2}$$

где $\wedge$ обозначает векторное произведение и $S = (S_1, S_2, S_3)$; $W = (W_1, W_2, W_3)$; длина векторов $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$, $W^2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 = b$, $a, b = const$. В большинстве случаев удобно работать с матричной формой этого уравнения, которая имеет вид

$$iS_t + \frac{1}{2}[S, S_{xx}] + \frac{1}{a}[S, W] = 0; \tag{3}$$

$$iW_x + a[S, W] = 0, \tag{4}$$

где $a = const$, $S = \Sigma_{j=1}^3 S_j(x, y, t)\sigma_j$ — матричный аналог спинового вектора; W — матричный вид векторного потенциала $W = \Sigma_{j=1}^3 W_j(x, y, t)\sigma_j$ и

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— матрицы Паули.

ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом интегрируемо методом обратной задачи рассеяния и допускает следующее представление Лакса:

$$\Phi_x = U\Phi; \tag{5}$$

$$\Phi_t = V\Phi, \tag{6}$$

где матричные операторы U и V задаются как

$$U = -i\lambda S;$$

$$V = \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + \left(\frac{i}{\lambda + a} - \frac{i}{a}\right) W;$$

$$V_2 = -2iS, \quad V_1 = SS_x.$$

Постановка задачи

Построить решение уравнения (3)–(4) методом Хироты. Отметим, что данное уравнение содержит две неизвестные функции $S(x,t)$ и $W(x,t)$. При $W(x,t) = 0$ уравнение (3) переходит к известному уравнению Ландау-Лифшица, открытому в 1935 г. В данном исследовании сложность заключается в установлении связи между решениями функций $S(x,t)$ и $W(x,t)$.

Билинеаризация

По алгоритму построения решения солитонного уравнения методом Хироты сначала мы должны построить так называемую билинейную форму уравнения (3)–(4). Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Билинейная форма ОУЛЛ с СВП (3) имеет вид

$$[iD_t + D_x^2](g \cdot f) - \frac{2}{a} p^* q = 0; \tag{7}$$

$$D_x^2 (f \cdot f) - \frac{2}{a} q^* q = 0; \tag{8}$$

$$D_x (p \cdot f) - 2iag^* q = 0; \tag{9}$$

$$D_x (q \cdot f) + 2iaqf = 0, \tag{10}$$

где f — вещественная функция; g, p, q — комплексные функции, а операторы Хироты определяются как

$$D_x^l D_t^n f(x,t) \cdot g(x,t) = (\partial_x - \partial_{x'})^l (\partial_t - \partial_{t'})^n f(x,t) \cdot g(x', t')|_{x=x', t=t'}. \tag{11}$$

Доказательство. Для удобства перепишем систему (3)–(4) в компонентах S и W:

$$iS_t^+ + S^+ S_{3xx} - S_3 S_{xx}^+ + \frac{2}{a}(S^+ W_3 - S_3 W^+) = 0; \tag{12}$$

$$iS_t^- - S_{3xx} S^- + S_3 S_{xx}^- - \frac{2}{a}(S^- W_3 - S_3 W^-) = 0; \tag{13}$$

$$2iS_{3t} + S_{xx}^+ S^- - S^+ S_{xx}^- + \frac{2}{a}(S^- W^+ - S^+ W^-) = 0; \tag{14}$$

$$iW_x^+ - 2a(S_3 W^+ - S^+ W_3) = 0; \tag{15}$$

$$iW_x^- - 2a(S^- W_3 - S_3 W^-) = 0; \tag{16}$$

$$iW_{3x} - a(S^+ W^- - S^- W^+) = 0. \tag{17}$$

Самосогласованный потенциал W дается как

$$W_3 = |\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2; \quad W^+ = 2\varphi_1^* \varphi_2; \quad W^- = 2\varphi_1 \varphi_2^*, \tag{18}$$

где φ_1 и φ_2 являются решениями матричной системы (5)–(6). Учитывая (18), перепишем уравнения (12)–(17) в виде

$$iS_t^+ + S^+S_{3xx} - S_3S_{xx}^+ + \frac{2}{a}\left(S^+(|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2) - 2S_3\varphi_1^*\varphi_2\right) = 0; \tag{19}$$

$$iS_t^- - S_{3xx}S^- + S_3S_{xx}^- - \frac{2}{a}(S^-(|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2) - 2S_3\varphi_1\varphi_2^*) = 0; \tag{20}$$

$$2iS_{3t} + S_{xx}^+S^- - S^+S_{xx}^- + \frac{4}{a}(S^-\varphi_1^*\varphi_2 - S^+\varphi_1\varphi_2^*) = 0; \tag{21}$$

$$\varphi_{1x} - ia(S_3\varphi_1 + S^-\varphi_2) = 0; \tag{22}$$

$$\varphi_{2x} - ia(S^+\varphi_1 - S_3\varphi_2) = 0. \tag{23}$$

Рассмотрим следующее стереографическое преобразование:

$$S^+ = \frac{2\omega}{1+|\omega|^2}; \quad S^- = \frac{2\omega^*}{1+|\omega|^2}; \quad S_3 = \frac{1-|\omega|^2}{1+|\omega|^2}. \tag{24}$$

Отсюда получим

$$\omega = \frac{S^+}{1+S_3}; \tag{25}$$

Таким образом, уравнения (19)–(23) перепишем в виде

$$i\omega_t - \omega_{xx} + \frac{2\omega^*\omega_x^2}{1+|\omega|^2} + \frac{2}{a}(\omega\varphi_2^* + \varphi_1^*)(\omega\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \tag{26}$$

$$\varphi_{1x} - \frac{ia}{1+|\omega|^2}\left((1-|\omega|^2)\varphi_1 + 2\omega^*\varphi_2\right) = 0; \tag{27}$$

$$\varphi_{2x} - \frac{ia}{1+|\omega|^2}\left(2\omega\varphi_1 - (1-|\omega|^2)\varphi_2\right) = 0. \tag{28}$$

Теперь преобразуем (26)–(28) к специальному виду, удобному для использования Паде-аппроксиманты [7]. Для этого заменим ω на $\frac{g}{f}$

$$\omega = \frac{g}{f}, \tag{29}$$

где g — комплексная функция; f — действительная функция, а φ_1 и φ_2 зададим в виде

$$\varphi_1 = \frac{p}{f}e^{iax}, \quad \varphi_2 = \frac{q}{f}e^{iax} \tag{30}$$

и найдем уравнения, которым удовлетворяют f, g, p, q, φ_1 и φ_2.

Подставляя (29) и (30), с учетом (11), дальнейшее преобразование уравнений (26)–(28) позволяет получить билинейную форму (7)–(10) для уравнений (19)–(23). *Теорема 1 доказана.*

Солитонное решение

Используя полученную билинейную форму, мы можем построить солитонное решение для спиновой системы. Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Односолитонное решение уравнения (3)–(4) для спиновой матрицы S имеет вид

$$S^+ = \frac{2\left(1 - \frac{a(k_1^2+l_1)(k_1^{*2}+l_1^*)e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1-k_1^*)^2}\right)e^{i\theta}}{\left(1 - \frac{a(k_1^2+l_1)(k_1^{*2}+l_1^*)e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1-k_1^*)^2}\right)^2 + e^{i(\theta-\theta^*)}}; \tag{31}$$

$$S_3 = \frac{\left(1 - \frac{a(k_1^2+l_1)(k_1^{*2}+l_1^*)e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1-k_1^*)^2}\right)^2 - e^{i(\theta-\theta^*)}}{\left(1 - \frac{a(k_1^2+l_1)(k_1^{*2}+l_1^*)e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1-k_1^*)^2}\right)^2 + e^{i(\theta-\theta^*)}}; \tag{32}$$

для потенциала W:

$$W^{+}=-\frac{a\left(1-\frac{a(l_1+k_1^2)}{(k_1-k_1^*)}\left(\frac{a(l_1^*+k_1^{*2})}{4(k_1-k_1^*)}+a\right)e^{i(\theta-\theta^*)}\right)(l_1+k_1^2)e^{i\theta}}{\left(1-\frac{a(k_1^2+l_1)(k_1^{*2}+l_1^*)e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1-k_1^*)^2}\right)^2}; \tag{33}$$

$$\begin{aligned}W_3=&\frac{\left(1-\frac{a(l_1+k_1^2)}{(k_1-k_1^*)}\left(\frac{a(l_1^*+k_1^{*2})}{4(k_1-k_1^*)}+a\right)e^{i(\theta-\theta^*)}\right)}{\left(1-\frac{a(k_1^2+l_1)(k_1^{*2}+l_1^*)e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1-k_1^*)^2}\right)^2}\times\\
&\times\frac{\left(1-\frac{a(l_1^*+k_1^{*2})}{(k_1^*-k_1)}\left(\frac{a(l_1+k_1^2)}{4(k_1^*-k_1)}+a\right)e^{i(\theta-\theta^*)}\right)}{\left(1-\frac{a(k_1^2+l_1)(k_1^{*2}+l_1^*)e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1-k_1^*)^2}\right)^2}+\\
&+\frac{\left(a^2(l_1+k_1^2)(l_1^*+k_1^{*2})e^{i(\theta-\theta^*)}\right)}{4\left(1-\frac{a(k_1^2+l_1)(k_1^{*2}+l_1^*)e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1-k_1^*)^2}\right)^2},\end{aligned} \tag{34}$$

где $\theta=k_1x+l_1t+m_1$, k_1,l_1 и m_1 — комплексные постоянные.

Доказательство. Разложим в уравнении (7)–(10) g, f, p и q в формальные ряды по произвольной постоянной ε:

$$g(x,t)=\varepsilon g_1(x,t)+\varepsilon^3 g_3(x,t)+\cdots; \tag{35}$$

$$f(x,t)=1+\varepsilon^2 f_2(x,t)+\varepsilon^4 f_4(x,t)+\cdots; \tag{36}$$

$$p(x,t)=1+\varepsilon^2 p_2(x,t)+\varepsilon^4 p_4(x,t)+\cdots; \tag{37}$$

$$q(x,t)=\varepsilon q_1(x,t)+\varepsilon^3 q_3(x,t)+\cdots. \tag{38}$$

N-солитонное решение исследуемого решения ищем в виде

$$g_j=\sum\nolimits_{j=1}^{N}\exp\theta_j,\quad \theta=k_jx+l_jt+m_j. \tag{39}$$

Возьмем случай $N=1$, при этом нетрудно заметить, что $g_j=0$ для $j\geq 3$ и $f_j=0$ для $j\geq 4$ [1]. Аналогично имеем, что $q_j=0$ для $j\geq 3$ и $p_j=0$ для $j\geq 4$. Для получения односолитонного решения уравнений (7)–(10) возьмем $g=\varepsilon g_1$, $p=1+\varepsilon^2 p_2$, $q=\varepsilon q_1$, $f=1+\varepsilon^2 f_2$. Подставляя эти выражения в билинейную форму (7)–(10), получим следующие данные:

$$ig_{1t}+g_{1xx}-\frac{2}{a}q_1=0; \tag{40}$$

$$ig_{1t}f_2-ig_1f_{2t}+g_{1xx}f_2-2g_{1x}f_{2x}+g_1f_{2xx}-\frac{2}{a}p_2^*q_1=0; \tag{41}$$

$$f_{2xx}-\frac{1}{a}q_1^*q_1=0; \tag{42}$$

$$f_2f_{2xx}-f_{2x}f_{2x}=0; \tag{43}$$

$$p_{2x}-f_{2x}-2iag_1^*q_1=0; \tag{44}$$

$$p_{2x}f_2-p_2f_{2x}=0; \tag{45}$$

$$q_{1x}+2iaq_1=0; \tag{46}$$

$$q_{1x}f_2-q_1f_{2x}+2iaq_1f_2=0. \tag{47}$$

Выбрав g_1 как $g_1=e^{i\theta}$, с$\theta=k_1x+l_1t+m_1$, можем построить решения для f, q_1, p_2 в виде

$$q_1=-\frac{a}{2}(l_1+k_1^2)e^{i\theta}; \tag{48}$$

$$f_2=-\frac{a(l_1+k_1^2)(l_1^*+k_1^{*2})}{(k_1-k_1^*)^2}e^{i(\theta-\theta^*)}; \tag{49}$$

$$p_2 = -\frac{a(l_1 + k_1^2)}{(k_1 - k_1^*)}\left(\frac{a(l_1^* + k_1^{*2})}{4(k_1 - k_1^*)} + a\right)e^{i(\theta - \theta^*)}. \tag{50}$$

Уравнение (24) в компонентах матрицы S имеет вид

$$S^+ = \frac{2fg}{f^2 + |g|^2}; \quad S^- = \frac{2fg^*}{f^2 + |g|^2}; \quad S_3 = \frac{f^2 - |g|^2}{f^2 + |g|^2}. \tag{51}$$

Наконец, можно получить решения уравнений (3)–(4) в виде (31)–(34). *Теоремы 1, 2 доказаны.*

Самосогласованное поведение спиновой матрицы S и потенциала W отчетливо видно на рисунке ниже. Графики полученных решений даны в интервале времени от 0 до 10 и при значениях постоянных: $k_1 = 25 - i$; $l_1 = 15 - i$; $m_1 = 1$.

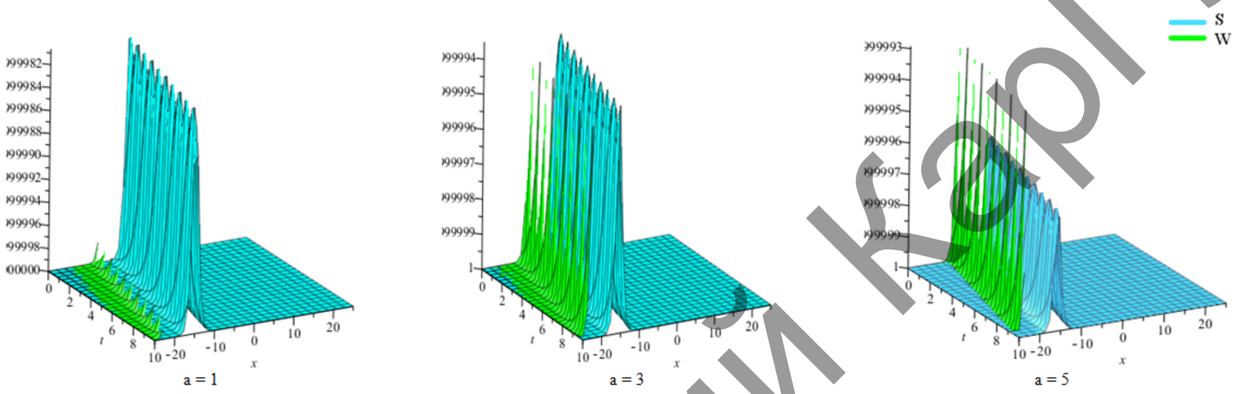

Рисунок. Поведение спиновой матрицы и потенциала

Заключение

Данная работа является последовательным продолжением наших предыдущих исследований в области интегрируемых спиновых систем, в частности, обобщенных уравнений Ландау-Лифшица с самосогласованным скалярным потенциалом. Объект исследования — обобщенное уравнение Ландау-Лифшица с самосогласованным источником, роль которого играет трехкомпонентный вектор с переменной длиной, а компонентами вектора являются функции от двух переменных. Поэтому рассмотренное нами обобщенное уравнение Ландау-Лифшица с самосогласованным источником не ограничивается выводами и закономерностями, сформулированными для спиновой модели со скалярным потенциалом. Основным результатом данной работы является нахождение связи, описывающей самосогласованное движение векторного потенциала и солитонной волны.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта 0893/ГФ4 МОН РК.

References

1 Myrzakulov, R., Vijayalakshmi, S., Nugmanova, G., Lakshmanan, M. (1999). A (2+1)-dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterpart, solitons and localized coherent structures. *Physics Letters A., Vol. 233, 4,* 391.

2 Myrzakulov, R., Nugmanova, G., Danlybaeva, A. (1999). Geometry and multidimensional soliton equations. *Theoretical and Mathematical Physics, Vol. 188,* 441.

3 Myrzakulov, R., Nugmanova, G., Syzdykova, R. (1998). Gauge equivalence between (2+1)-dimensional continuous Heisenberg ferromagnetic models and nonlinear Schrodinger-type equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol. 31,* 147.

4 Zhang, Zh.-H., Deng, M., Zhao, W.-Zh., Ke, W. On the integrable inhomogeneous Myrzakulov I Equation. Retrieved from arXiv:nlin/0603069v1 [nlin.SI].

5 Chen, Ch., Zhou, Zi-X. (2009). Darboux Transformation and Exact Solutions of the Myrzakulov I Equation. *Chinese Physics Letters, Vol. 26,* 080504.

6 Myrzakulov, R., Mamyrbekova, G., Nugmanova, G., Lakshmanan, M. (2015). Integrable $(2+1)$-Dimensional Spin Models with Self-Consistent Potentials. *Symmetry, Vol. 7,* 1352.

7 G.A. Baker, Jr., Gammel, J.L. (1973). *The Pade Approximant in Theoretical Physics.* New-York: Academic Press.

Г.Н. Нугманова, Ж.М. Сагидуллаева

Векторлық потенциалы бар жалпыланған спиндік үлгі және оның шешімі

Мақалада өздігінен келісілген векторлық потенциалды интегралданатын жалпыланған Ландау-Лифшиц теңдеуі зерттелді. Спиндік вектор және потенциалдың өздігінен келісуі, үйлесу шарты біздің қарастырып отырған теңдеуімізге сәйкес келетін потенциал мен жүйенің шешімдерінің арасындағы байланысы арқылы жүзеге асатыны анықталды. Хирота әдісін жалпыландырып, потенциал мен солитонның өздігінен келісілген қозғалысын сипаттайтын нақты шешімі алынды.

Кілт сөздер: спиндік үлгілер, Хирота әдісі, солитонды шешімдер, интегралданатын жалпыланған дифференциалды теңдеулер, Ландау-Лифшиц теңдеуі, потенциалдық қозғалыс.

G.N. Nugmanova, Zh.M. Sagidullayeva

Generalized spin model with vector potential and its solution

In this work an integrable generalization of the Landau-Lifshitz equation with self-consistent vector potential is studied. It was established that self-consistence of spin vector and potential happen by the relation between solutions of the potential and linear system, the compatibility condition of which corresponds to the equation considered by us. By generalizing Hirota's method, it's exact solutions, defining self-consistent motion of the potential and soliton, are constructed.

Keywords: spin models, Hirota's method, soliton solutions, integrable nonlinear differential equations, Landau-Lifshitz equation, potential motion.