УДК 517.512

Э.К.Бекмагамбетова, Г.А.Акишев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: akishev@ksu.kz)

Об элементе наилучшего приближения в пространстве $l_\theta(L_p)$

В статье рассмотрено пространство измеримых по Лебегу функций $l_\theta(L_p)$. Даны определения наилучшего приближения и наилучшего (α,β)-приближения элемента пространства $l_\theta(L_p)$ подмножеством F. Установлен критерий элемента наилучшего приближения в пространстве $l_\theta(L_p)$. Получено условие существования элемента наилучшего (α,β)-приближения в этом пространстве. Дан критерий элемента наилучшего (α,β)-приближения в пространстве $l_\theta(L_p)$.

Ключевые слова: наилучшее приближение, Лебег, измеримая функция, неравенство Гельдера, Минковский, критерий, (α,β)-приближение, пространство $l_\theta(L_p)$.

§ 1. Характеризация элемента наилучшего приближения в пространстве

Одним из основных задач теории приближения является вопрос существования и единственности элемента наилучшего приближения.

Критерий элемента наилучшего приближения в пространстве Лебега L_p известен из [1–4].

Определение 1. Измеримая по Лебегу на $[0,1]$ функция $f\in l_\theta(L_p)$, если

$$\|f\|_{l_\theta(L_p)}=\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{\theta}{p}}\right)^{\frac{1}{\theta}}\prec+\infty,\quad 1\le p,\theta\le+\infty.$$

Если $\theta=p$, то $l_\theta(L_p)=L_p$ — пространство Лебега.

Теорема 1. Пусть $F\subset l_\theta(L_p)$, $1<p,\theta<\infty$, F — подпространство. Для того, чтобы $u_0\in F$ был элементом наилучшего приближения для функции $f\in l_\theta(L_p)$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\, g\in F$ выполнялось равенство

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}|f(t)-u_0(t)|^{p-1}\left(f(t)-u_0(t)\right)sign\left(f(t)-u_0(t)\right)dt\right)^{\frac{\theta}{p}-1}\times$$

$$\times\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}g(x)|f(t)-u_0(t)|^{p-1}sign\left(f(t)-u_0(t)\right)dt=0. \qquad (1)$$

Доказательство. Сначала докажем достаточность. Пусть для любого $g\in F$ выполнено (1). Тогда

$$\|f-u_0\|^{\theta}_{l_\theta(L_p)}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}|f(t)-u_0(t)|^p\,dt\right)^{\frac{\theta}{p}}=$$

Репозиторий КарГУ

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^{p-1}\left(f(t)-u_0(t)\right)sign\left(f(t)-u_0(t)\right)dt\right)^{\frac{\theta}{\rho}}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^{p-1}\left(f(t)-u_0(t)\right)sign\left(f(t)-u_0(t)\right)dt\right)^{\frac{\theta}{p}-1}\times$$

$$\times\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^{p-1}\left(f(t)-u_0(t)\right)sign\left(f(t)-u_0(t)\right)dt\,.$$

Для любого $u\in F$ преобразуем это равенство.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^{p-1}\left(f(t)-u_0(t)\right)sign\left(f(t)-u_0(t)\right)dt\right)^{\frac{\theta}{p}-1}\times$$

$$\times\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^{p-1}\left(f(t)-u(t)+u(t)-u_0(t)\right)sign\left(f(t)-u_0(t)\right)dt=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^{p-1}\left(f(t)-u_0(t)\right)sign\left(f(t)-u_0(t)\right)dt\right)^{\frac{\theta}{p}-1}\times$$

$$\times\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^{p-1}\left(f(t)-u(t)\right)sign\left(f(t)-u_0(t)\right)dt+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^{p-1}\left(f(t)-u_0(t)\right)sign\left(f(t)-u_0(t)\right)dt\right)^{\frac{\theta}{p}-1}\times$$

$$\times\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^{p-1}\left(u(t)-u_0(t)\right)sign\left(f(t)-u_0(t)\right)dt.$$

Так как для $\forall g\in F$ выполняется (1), то отсюда получим

$$\left\|f-u_0\right\|_{l_\theta\left(L_p\right)}^{\theta}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^{p-1}\left(f(t)-u_0(t)\right)sign\left(f(t)-u_0(t)\right)dt\right)^{\frac{\theta}{p}-1}\times$$

$$\times\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^{p-1}\left(f(t)-u(t)\right)sign\left(f(t)-u_0(t)\right)dt. \qquad (2)$$

Применяя неравенство Гельдера, имеем:

$$J=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^{p}dt\right)^{\frac{\theta}{p}-1}\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^{p-1}\left|f(t)-u(t)\right|sign\left(f(t)-u_0(t)\right)dt\le$$

Репозиторий КарГУ

$$\le \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^p dt\right)^{\frac{\theta}{p}-1}\cdot\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^{(p-1)p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}}\cdot\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^p dt\right)^{\frac{\theta}{p}-\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3)$$

Далее применяем неравенство Гельдера для сумм. Тогда из (3) получим

$$J\le\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^p dt\right)^{\frac{\theta-1}{p}\cdot\theta'}\right\}^{\frac{1}{\theta'}}\cdot\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u(t)\right|^p dt\right)^{\frac{\theta}{p}}\cdot\right\}^{\frac{1}{\theta}}=\left\|f-u_0\right\|_{l_\theta(L_p)}^{\frac{\theta}{\theta'}}\cdot\left\|f-u\right\|_{l_\theta(L_p)};$$

$$\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta'}=1.$$

Таким образом, доказано неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^p dt\right)^{\frac{\theta}{p}-1}\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^{p-1}\left|f(t)-u(t)\right|sign\left(f(t)-u_0(t)\right)dt\le$$

$$\le\left\|f-u_0\right\|_{l_\theta(L_p)}^{\theta-1}\cdot\left\|f-u\right\|_{l_\theta(L_p)}. \qquad (4)$$

Из (2) и (4) следует, что для любого $u\in F$

$$\left\|f-u_0\right\|_{l_\theta(L_p)}^{\theta}\le\left\|f-u_0\right\|_{l_\theta(L_p)}^{\theta-1}\cdot\left\|f-u\right\|_{l_\theta(L_p)}.$$

Отсюда получим

$$\left\|f-u_0\right\|_{l_\theta(L_p)}\le\left\|f-u\right\|_{l_\theta(L_p)},\ \forall u\in F.$$

Следовательно,

$$E(f,F)_{l_\theta(L_p)}=\left\|f-u_0\right\|_{l_\theta(L_p)},\ f\in l_\theta(L_p).$$

Докажем необходимость. Используем метод от противного. Допустим, что для некоторого $g_0\in F$ условие (1) не выполняется, т.е.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)\right|^p dt\right)^{\frac{\theta}{p}-1}\cdot\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}g_0(t)\left|f(t)-u_0(t)\right|^{p-1}sign\left(f(t)-u_0(t)\right)dt\ne 0.$$

Тогда найдется $\varepsilon>0$ такое, что

$$\varepsilon\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)-\varepsilon g_0(t)\right|^p dt\right)^{\frac{\theta}{p}-1}\cdot\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}g_0(t)\left|f(t)-u_0(t)-\varepsilon g_0(t)\right|^{p-1}sign\left(f(t)-u_0(t)-\varepsilon g_0(t)\right)dt\succ 0.$$

Тогда

$$\left\|f-u_0-\varepsilon g_0\right\|_{l_\theta(L_p)}^{\theta}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)-u_0(t)-\varepsilon g_0(t)\right|^p dt\right)^{\frac{\theta}{p}}<$$

Репозиторий КарГУ

$$< \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}} \left(f(t)-u_0(t)-\varepsilon g_0(t) \right) \left| f(t)-u_0(t)-\varepsilon g_0(t) \right|^{p-1} sign\left(f(t)-u_0(t)-\varepsilon g_0(t) \right) dt \right)^{\frac{\theta}{p}-1} \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}} \left(f(t)-u_0(t) \right) \left| f(t)-u_0(t)-\varepsilon g_0(t) \right|^{p-1} sign\left(f(t)-u_0(t)-\varepsilon g_0(t) \right) dt = K.$$

Далее применяем интегральное неравенство Гельдера, тогда

$$K \le \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}} \left(f(t)-u_0(t)-\varepsilon g_0(t) \right) \left| f(t)-u_0(t)-\varepsilon g_0(t) \right|^{p-1} sign\left(f(t)-\varphi_0(t)-\varepsilon g_0(t) \right) dt \right)^{\frac{\theta}{p}-1} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}} \left| f(t)-u_0(t) \right|^{p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}} \left| f(t)-u_0(t)-\varepsilon g_0(t) \right|^{(p-1)p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = L.$$

Далее применяем неравенство Гельдера для сумм. Тогда

$$L \le \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}} \left| f(t)-u_0(t) \right|^{p} dt \right)^{\frac{\theta}{p}} \right]^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}} \left| f(t)-u_0(t)-\varepsilon g_0(t) \right|^{p} dt \right)^{\left(\frac{\theta}{p}-1\right)\theta'} \cdot \left(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}} \left| f(t)-u_0(t)-\varepsilon g_0(t) \right|^{p} dt \right)^{\frac{\theta'}{p'}} \right]^{\frac{1}{\theta'}} =$$

$$= \left\| f-u_0 \right\|_{l_\theta(L_p)} \cdot \left\| f-u_0-\varepsilon g_0 \right\|_{l_\theta(L_p)}^{\frac{\theta}{\theta'}}, \quad \frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta'}=1.$$

Таким образом,

$$\left\| f-u_0-\varepsilon g_0 \right\|_{l_\theta(L_p)} \prec \left\| f-u_0 \right\|_{l_\theta(L_p)}.$$

Это противоречит тому, что $u_0 \in F$ есть элемент наилучшего приближения для $f \in l_\theta(L_p)$. Теорема доказана.

§ 2. Несимметричные приближения в пространстве $l_\theta(L_p)$

В этом пункте рассмотрим вопросы существования элемента наилучшего несимметричного приближения в пространстве $l_\theta(L_p)$. Этот вопрос ранее исследовали В.Ф.Бабенко [5], И.Э.Симонова и Б.В.Симонов [6].

Зададим числа $\alpha > 0, \beta > 0$ и определим на $l_\theta(L_p)$, $1 \le p, \theta < \infty$, функционал

$$\|f\|_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)} = \left\| \alpha f_+ + \beta f_- \right\|_{l_\theta(L_p)} = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}} \left| f(t)\left[\alpha\, sign\, f_+(t) + \beta\, sign\, f_-(t) \right] \right|^{p} dt \right)^{\frac{\theta}{p}} \right)^{\frac{1}{\theta}},$$

где $f_+(t) = \max\left(f(t), 0\right)$, $f_-(t) = \max\left(-f(t), 0\right)$.

Репозиторий КарГУ

Определение 2. Пусть $F \subset l_\theta(L_p)$, $1<p,\theta<\infty$, $\alpha>0,\beta>0$. Наилучшим (α,β)-приближением элемента $f \in l_\theta(L_p)$ множеством F называется величина

$$E(f,F)_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)} = \inf_{u\in F}\|f-u\|_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)}.$$

Определение 3. Элемент $u_0\in F$ называется элементом наилучшего (α,β)-приближения для $f\in l_\theta(L_p)$, если

$$E(f,F)_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)} = \|f-u_0\|_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)}.$$

Замечание. При $\theta=p$ понятие наилучшего (α,β)-приближения определил В.Ф.Бабенко [5].

Лемма. Для любых функций $f,g\in l_\theta(L_p)$ справедливо неравенство

$$\|f+g\|_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)} \le \|f\|_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)} + \|g\|_{l_{\theta'}(L_{p'});(\alpha^{-1},\beta^{-1})},\ 1\le p,\theta<\infty.$$

Теорема 2. Если $f\in l_\theta(L_p)$ и $g\in l_{\theta'}(L_{p'})$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta'}=1$, то

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt \le \|f\|_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)}\|g\|_{l_{\theta'}(L_{p'});(\alpha^{-1},\beta^{-1})}.$$

Доказательство. Для функции $f\in l_\theta(L_p)$ для краткости положим $\chi_{(\alpha,\beta)}(f,t)=\alpha\, sign\, f_+(t)-\beta\, sign\, f_-(t)$ и заметим, что всегда

$$\chi_{(\alpha,\beta)}(f,t)\chi_{(\alpha^{-1},\beta^{-1})}(f,t)\equiv 1,\ f(t)\chi_{(\alpha,\beta)}(f,t)\ge 0.$$

Воспользуемся неравенством [6]

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt \le \int_0^1\left[f(t)\chi_{(\alpha,\beta)}(f,t)\right]\left[g(t)\chi_{(\alpha^{-1},\beta^{-1})}(g,t)\right]dt \tag{5}$$

и применим неравенство Гельдера к интегралу в правой части. Тогда

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt \le \left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)\chi_{(\alpha,\beta)}(f,t)\right|^p dt\right)^{\frac{\theta}{p}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|g(t)\chi_{(\alpha^{-1},\beta^{-1})}(g,t)\right|^{p'} dt\right)^{\frac{\theta'}{p'}}\right\}^{\frac{1}{\theta'}}. \tag{6}$$

Теперь нужно доказать равенство

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)\chi_{(\alpha,\beta)}(f,t)\right|^p dt\right)^{\frac{\theta}{p}} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}|f(t)|^p\left[\alpha^p\, sign\, f_+(t)+\beta^p\, sign\, f_-(t)\right]dt\right)^{\frac{\theta}{p}}. \tag{7}$$

Обозначим $\Omega_+(\nu)=\left\{t\in\left[\frac{1}{\nu+1};\frac{1}{\nu}\right]: f(t)\ge 0\right\}$, $\Omega_-(\nu)=\left\{t\in\left[\frac{1}{\nu+1};\frac{1}{\nu}\right]: f(t)<0\right\}$, тогда по свойству интеграла

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)\chi_{(\alpha,\beta)}(f,t)\right|^p dt\right)^{\frac{\theta}{p}} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}|f(t)|^p\left|\alpha\, sign\, f_+(t)-\beta\, sign\, f_-(t)\right|^p dt\right)^{\frac{\theta}{p}} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{\Omega_+(\nu)}|f(t)|^p\left|\alpha\, sign\, f_+(t)-\beta\, sign\, f_-(t)\right|^p dt + \int_{\Omega_-(\nu)}|f(t)|^p\left|\alpha\, sign\, f_+(t)-\beta\, sign\, f_-(t)\right|^p dt\right)^{\frac{\theta}{p}} =$$

Репозиторий КарГУ

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\Omega_+(\nu)}\left|f(t)\right|^p\alpha^p dt+\int\limits_{\Omega_-(\nu)}\left|f(t)\right|^p\beta^p dt\right)^{\frac{\theta}{p}}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\Omega_+(\nu)}\left|f(t)\right|^p\left[\alpha^p\, sign\, f_+(t)+\beta^p sign\, f_-(t)\right]dt+\int\limits_{\Omega_-(\nu)}\left|f(t)\right|^p\left[\alpha^p\, sign\, f_+(t)+\beta^p sign\, f_-(t)\right]dt\right)^{\frac{\theta}{p}}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)\right|^p\left[\alpha^p\, sign\, f_+(t)+\beta^p sign\, f_-(t)\right]dt\right)^{\frac{\theta}{p}}.$$

Равенство (7) доказано. Аналогично доказывается равенство

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|g(t)\chi_{\left(\alpha^{-1},\beta^{-1}\right)}(g,t)\right|^{p'}dt\right)^{\frac{\theta'}{p'}}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|g(t)\right|^{p'}\left[\alpha^{-p'}\, sign\, g_+(t)+\beta^{-p'} sign\, g_-(t)\right]dt\right)^{\frac{\theta'}{p'}}. \qquad (8)$$

Из (6)–(8) следует, что

$$\int\limits_0^1 f(t)g(t)dt\le\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)\right|^p\left[\alpha^p\, sign\, f_+(t)+\beta^p sign\, f_-(t)\right]dt\right)^{\frac{\theta}{p}}\times$$

$$\times\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|g(t)\right|^{p'}\left[\alpha^{-p'}\, sign\, g_+(t)+\beta^{-p'} sign\, g_-(t)\right]dt\right)^{\frac{\theta'}{p'}}. \qquad (9)$$

Далее по определению функции f_+, f_- имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)\right|^p\left[\alpha^p\, sign\, f_+(t)+\beta^p sign\, f_-(t)\right]dt\right)^{\frac{\theta}{p}}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\Omega_+(\nu)}\left|f(t)\right|^p\alpha^p dt+\int\limits_{\Omega_-(\nu)}\left|f(t)\right|^p\beta^p dt\right)^{\frac{\theta}{p}}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\Omega_+(\nu)}\left|f(t)\right|^p\left[\alpha\, sign\, f_+(t)+\beta\, sign\, f_-(t)\right]dt+\int\limits_{\Omega_-(\nu)}\left|f(t)\right|^p\left[\alpha\, sign\, f_+(t)+\beta\, sign\, f_-(t)\right]dt\right)^{\frac{\theta}{p}}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|f(t)\left[\alpha\, sign\, f_+(t)+\beta\, sign\, f_-(t)\right]\right|^p dt\right)^{\frac{\theta}{p}}=\left\|f\right\|^{\theta}_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)}. \qquad (10)$$

Аналогично доказывается равенство

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left|g(t)\right|^{p'}\left[\alpha^{-p'}\, sign\, g_+(t)+\beta^{-p'} sign\, g_-(t)\right]dt\right)^{\frac{\theta'}{p'}}=\left\|g\right\|_{l_{\theta'}(L_{p'});\left(\alpha^{-1},\beta^{-1}\right)}. \qquad (11)$$

Из соотношений (9)–(11) вытекает

$$\int\limits_0^1 f(t)g(t)dt\le\left\|f\right\|_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)}\left\|g\right\|_{l_{\theta'}(L_{p'});\left(\alpha^{-1},\beta^{-1}\right)}.$$

Теорема доказана.

Замечание. В случае $\theta=p$ из теоремы 2 следует теорема 1 [5].

Репозиторий КарГУ

Теорема 3 (о существовании элемента наилучшего приближения). Пусть $1 < p, \theta < \infty$, $F \subset L_p(l_\theta)$ — конечномерное подпространство и $\alpha > 0, \beta > 0$. Тогда для любой функции $f \in l_\theta(L_p)$ существует элемент наилучшего (α,β) -приближения в F.

Доказательство. Пусть $f \in l_\theta(L_p)/F$. Так как F — замкнутое подпространство, то

$$E(f,F)_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)} = d > 0.$$

По определению точной нижней грани для каждого $m = 1, 2, \ldots$ существует элемент $u_m \in F$ такой, что

$$\|f - u_m\|_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)} < d + \frac{1}{m}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

В силу неравенства Минковского (лемма 1) имеем

$$\|u_m\|_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)} \le \|u_m - f\|_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)} + \|f\|_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)} < d + \frac{1}{m} + \|f\|_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)} \le d + 1 + \|f\|_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Значит, $\{u_m\} \subset F$ — ограниченная последовательность. Так как F конечномерно, то найдется последовательность $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$, сходящаяся к некоторому u_0. Так как F замкнуто, то $u_0 \in F$. Таким образом,

$$\left\|u_{m_j} - u_0\right\|_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)} \to 0, \; j \to +\infty.$$

Теперь по определению наилучшего (α,β) -приближения

$$\mathrm{d} \le \left\|f - u_{m_j}\right\|_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)} < d + \frac{1}{m_j}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

В этом неравенстве, переходя к пределу при $j \to +\infty$, имеем:

$$d = \|f - u_0\|_{l_\theta(L_p);(\alpha,\beta)},$$

т.е. $u_0 \in F$ является элементом наилучшего (α,β) -приближения для $f \in l_\theta(L_p)$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $1 < p, \theta < \infty$, $F \subset L_p(l_\theta)$ — конечномерное подпространство и $\alpha > 0, \beta > 0$. Для того, чтобы функция $u_0 \in F$ доставляла функции $f \in l_\theta(L_p)$ наилучшее (α,β) -приближение, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}} \left|f(t) - u_0(t)\right|^p \left[\alpha^p \, sign\left(f(t) - u_0(t)\right)_+ - \beta^p \, sign\left(f(t) - u_0(t)\right)_- \right] dt \right)^{\frac{\theta}{p}-1} \times$$

$$\times \left(\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}} u(t) \left|f(t) - u_0(t)\right|^{p-1} \left[\alpha^p \, sign\left(f(t) - u_0(t)\right)_+ - \beta^p \, sign\left(f(t) - u_0(t)\right)_- \right] dt \right) = 0.$$

Эта теорема доказывается с помощью теорем 2, 3.

References

1 *Nikolskii S.M.* Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. — M.: Science, 1977. — 456 p.

2 *Korneichuk N.P.* Extremal problem of approximation theory. — M.: Science, 1976. — 320 p.

3 *Timan A.F.* Theory of approximation of functions of a real variable. — M., 1960. — 624 p.

4 *Berdyshev V.I., Petrak L.V.* Approximation of functions, compression of the numerical information, application. — Ekaterinburg, 1999. — 297 p.

5 *Babenko V.F.* Nonsymmetric approximations in spaces of summable functions / Ukr. Math. J. — 1982. — Vol. 34. — № 4. — P. 409–419.

6 *Simonova I.E., Simonov B.V.* On the polynomial of best nonsymmetric approximation in an Orlicz space // Mat. — № II. — 1995. — P. 50–56.

7 *Korneichuk N.P.* Exact constants in approximation theory. — M.: Science, 1987. — P. 394.

Репозиторий КарГУ

Э.К.Бекмағамбетова, Г.А.Ақышев

$l_\theta\left(L_p\right)$ кеңістігіндегі ең жақсы жуықтау элементі туралы

Мақалада Лебег бойынша өлшемді функциялардың $l_\theta\left(L_p\right)$ кеңістігі қарастырылды. Осы кеңістіктің элементін F ішкі жиынымен ең жақсы жуықтау, ең жақсы (α,β)-жуықтау анықтамалары берілді. $l_\theta\left(L_p\right)$ кеңістігіндегі ең жақсы жуықтау элементінің критерийі, ең жақсы (α,β)-жуықтау элементінің бар болуының шарты және ең жақсы (α,β)-жуықтау элементінің критерийі алынды.

E.K.Bekmagambetova, G.A.Akyshev

About the element of the best approximation in $l_\theta\left(L_p\right)$ space

The $l_\theta\left(L_p\right)$ space o f functions measurable by Lebesgue it was considered in this article. It was given the definitions of the best approximation and best (α,β)-approximation of the element by subset F in $l_\theta\left(L_p\right)$ space. The criterion of an element of the best approximation in $l_\theta\left(L_p\right)$ space is established. The condition of existence of an element of the best (α,β)-approximation was received. The criterion of an element of the best (α,β)-approximation was given.

УДК 517.518

А.А.Бердалиева, Т.С.Григорьева, К.Т.Бертисканова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: berdalieva_a_a@mail.ru, bertiskanova_k_t@mail.ru)

Школьный учебник математики — основа математического образования

В настоящей статье освещены итоги проверки учебников математики 5-го класса и учебно-методических комплексов к ним для средних общеобразовательных школ с русским языком обучения, организованной по линии Министерства образования и науки РК. Материалы статьи имеют непосредственное отношение к профессиональной деятельности преподавателей и студентов математического факультета, учителей математики, а также могут вызвать определенный интерес у тех читателей, кому не безразлично состояние математического образования в стране и уровень образованности подрастающего поколения.

Ключевые слова: учебник, новое поколение, учебный процесс, математика, образование, УМК, учитель, ГОСО, учебный план.

С 70-х годов XX века в бывшем Советском Союзе началась школьная реформа, которая коснулась и проблемы создания новых школьных учебников. Практика показала, что не все учебники, появившиеся в ту пору, соответствовали всем требованиям к их написанию, даже отмечалась их вредность применительно к учебному процессу по математике.

В связи с образованием независимого Казахстана вопрос о новых школьных учебниках встал с особой остротой. У кого-то может возникнуть вопрос, а нужны ли другие учебники, когда есть проверенные опытом и практикой хорошие учебники. Мы же говорим, что да, безусловно, нужны новые, казахстанские школьные учебники, в том числе и по математике. Нужны учебники нового поколения, которые были бы приближены к национальным традициям и просвещению. По началу это были пробные книги, написанные коллективом авторов, порой недостаточно знакомых с системой средне-

Репозиторий КарГУ