УДК 530.1

К.М. Арынгазин, В.В. Архипов, А.С. Кудусов

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова, Казахстан
(E-mail: a_kudusov@mail.ru)

Фундаментальные принципы физики и геометрия Финслера

Представленная работа посвящена анализу геометрии Финслера в плане её потенциальных возможностей служить базисом для построения обобщенных теорий взаимодействия. Финслерова геометрия является одним из обобщений римановой геометрии. В финслеровой геометрии рассматриваются многообразия с финслеровой метрикой, т.е. выбором нормы на каждом касательном пространстве, которая гладко меняется от точки к точке. Финслерова геометризация пространства–времени дает возможность развивать теорию физических полей с различными внутренними симметриями, опираясь на понятие группы преобразований касательных векторов, оставляющих инвариантной финслерову метрическую функцию. В работе обсуждаются общие свойства финслеровой геометрии и их редукция к классическим случаям. Показывается, что геометрия Финслера является естественным обобщением геометрических базисов всех основных теоретико-полевых моделей, таких как общая теория относительности, теория Янга-Миллса, калибровочная гравитация, теории Калуцы-Клейна. На основе сравнения теорий делается прогноз о геометрических свойствах будущей теории великого объединения. Осмысленное внедрение финслеровой геометрии в физику может помочь по-новому взглянуть на классические и широко известные задачи, а также помочь в построении новых подходов в проблемных областях.

Ключевые слова: геометрия Финслера, теория поля, общая теория взаимодействий, метрика, калибровочные поля.

С начала XX в., точнее — с появления специальной теории относительности Эйнштейна, не угасает интерес к возможностям применения геометрических идей и методов в современной физике. Особо плодотворные результаты эти подходы принесли в теоретической физике, практически во всех её областях. В настоящей работе обсуждаются потенциальные возможности применения геометрии Финслера, как наиболее общего из геометрических подходов, к решению ряда актуальных физических проблем [1–5].

По этому поводу В.Г. Жотиков [3] пишет: «Последнее время в физической литературе наметился серьезный интерес к идеям и методам геометрии Финслера и их приложениям к проблемам современной физики от квантовой гравитации и физики микромира до астрофизики и космологии. Мы видим в этом начало осознания необходимости перехода к новой парадигме физики».

Действительно, геометрия Минковского сыграла огромную роль в современном понимании электромагнетизма, псевдо-Риманова геометрия послужила основой доминирующей в настоящее время теории гравитации, теория гильбертовых пространств составляет основу квантовой теории поля.

Каждая из упомянутых геометрий привязана к собственной системе объектов — физических или абстрактных, но отражающих свойства физических систем.

Анализируя известные геометрии своего времени, в 1872 г. Ф. Клейн сформулировал единую точку зрения на геометрию как на теорию инвариантов соответствующей группы преобразований. Это было крупным открытием не только в математике, но и в физике [6]. Исследуя группы преобразований, имеющих практическое приложение в физике, он дал классификацию геометрий, а теорию инвариантов каждой группы представил как аналитическую структуру каждой геометрии (фундаментальные группы).

Таким образом, Ф. Клейн пришел к расширенному пониманию геометрии, сформулировав её задачу следующим образом: дано многообразие, и в нём определена группа преобразований. Тем самым он вводит важнейшие понятия для всей современной теоретической физики — группы преобразований и инвариантов относительно этих преобразований.

Таким образом, как пишет В.Г. Жотиков: «Из общего определения следует, что существуют различные геометрии. Они могут отличаться друг от друга характером элементов многообразия и строением группы. Последнее отличие является наиболее существенным. Если геометрии различаются между собой по характеру элементов многообразия, но их фундаментальные группы изоморфны, то каждому факту одной геометрии будет соответствовать факт другой. При этом каждую из них можно изучать на основе другой» [3].

Следовательно, задача каждой геометрии состоит в изучении тех её свойств, которые остаются инвариантными относительно соответствующей группы преобразований. В этом состоит основная идея Ф. Клейна.

Указанная взаимосвязь геометрий и теоретической физики приводит к мысли о существовании общих фундаментальных принципов, лежащих в их основе. В качестве иллюстрации влияния физики на развитие геометрических идей можно привести принцип наименьшего действия, давшего импульс развития теории функциональных пространств, и принцип дискретности (квантования) материи и энергии. В то же время история развития этих принципов в физике — это история внедрения в неё новых геометрических идей для их интерпретации.

Остановимся на этих принципах более подробно. Как известно, принцип наименьшего действия подразумевает, что эволюция физической системы идет тем путем, вдоль которого некоторый функционал

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt,$$

называемый действием, принимает наименьшее значение. Здесь $L(p, q)$ — функция Лагранжа, q — набор обобщенных координат, задающих положение системы в конфигурационном пространстве.

Требование равенства нулю вариации этого функционала

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \big(L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t) \big) dt = 0 \qquad (1)$$

обеспечивает экстремальность действия и является основным методом получения уравнений движения. На них, в свою очередь, опираются выводы всех остальных законов физики [2].

Взаимное влияние физики и геометрий проявляется также в установлении некоторых фундаментальных пределов. Так, существование предельной скорости $c = const$ обусловлено индифинитностью метрики пространства Минковского. Конкретное значение константы c является вопросом договоренности и соотношений временного и пространственного масштабов. Однако само существование предела скорости есть объективная реальность физического мира. Другой константой, устанавливающей предел возможности проведения измерений в микромире, является постоянная Планка $\hbar$. В геометрическом плане существование этой константы накладывает ограничение на размер фазовых ячеек фазового пространства, как пространства состояний классических динамических систем. Она же является мерой некоммутативности алгебры квантовомеханических операторов в пространстве Гильберта. В более глобальном плане можно сказать, что существование постоянной Планка является отражением принципа дискретности нашего мира. И если форма участия постоянной $\hbar$ в квантовании энергии безмассовых частиц (фотонов) вполне известна $E = \hbar\omega$, то задача дискретности и иерархии масс и энергий массивных частиц $E = mc^2$ остается до конца не решенной, при наличии, конечно, ряда перспективных гипотез.

Таким образом, принципы наименьшего действия и дискретности являются одними из краеугольных принципов в современной физике. Геометрическую интерпретацию этим двум принципам дал В. Вагнер [7].

В последние годы заметно растет интерес к обобщениям начальных принципов и понятий теории относительности и теории калибровочных полей на основе принципов финслеровой геометрии. Аппарат финслеровой геометрии и её обобщений используется в многочисленных современных исследованиях как новый подход в развитии канонических методов калибровочных теорий, теории поля и теории гравитации на основе качественно новых метрических представлений о пространстве-времени и его расслоенной структуре. Спектр физических проблем, в которых можно выделить финслеров геометрический аспект и дать на его основе систематическое описание, достаточно широк.

Напомним, что элемент длины финслерова пространства задается скалярной функцией F, зависящей от точек многообразия x^i и дифференциалов dx^i, т.е. $ds = F(x^i, dx^i)$. Причем метрическая функция F является положительно определенной, однородной функцией первой степени относительно дифференциалов dx^i, т.е. $F(x^i, kdx^i) = kF(x^i, dx^i)$, $k > 0$. В то же время в теории обобщенных финслеровых пространств мы имеем, согласно определению, $ds^2 = g_{ij}(x^k, dx^k) dx^i dx^j$. Собственно определение финслерова метрического тензора имеет вид $g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$, где y^k обозначает касательный вектор, отнесенный к локальной системе координат.

Понятие финслеровой метрики ведет к непосредственному обобщению обычного риманова определения метрики. Введенные метрики обобщенного типа сводятся к их риманову прототипу при наложении на них следующих строгих ограничений:

$$\frac{\partial^3 F^2}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} = 0 \text{ и } \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = 0$$

соответственно.

Удачной иллюстрацией финслерова обобщения фундаментальных принципов является работа [8], посвященная принципу Ферма. В работе [9] обосновывается понимание финслеровой геометрии, как широкого обобщения геометрии Римана до снятия квадратичного ограничения на вид метрики. Собственно, Риман изначально и вводил метрику как элемент дуги, имеющий самый общий вид:

$$ds = F(x^1, \ldots, x^n, dx^1, \ldots, dx^n),$$

ограничившись затем частным случаем квадратичной метрики. В этой связи интересно процитировать самого Римана: «В пространстве, на котором можно ввести прямолинейные координаты, $ds = \sqrt{\sum (dx^i)^2}$, что является простейшим случаем. Следующим по простоте случаем, возможно, является корень четвертой степени из дифференциального выражения четвертого порядка. Исследование этого более общего случая вряд ли потребует существенно новых подходов, но будет гораздо более трудоемким и прольет относительно меньше света на свойства пространства, особенно если результаты не смогут быть выражены в геометрической форме».

Таблица

Геометрическое сравнение унифицированных полевых теорий

	Геометрия	Метрика	Связность	Кривизна
	ОТО	g	Г	R
	Янг-Миллс	?	A	F
	Калибровочная гравитация	?	g	?
	Калуца-Клейн	g+A	?	?
	Финслер	A	F	T

Примечание. Из работы [10].

Строка 1: Общая теория относительности. Метрика, связность и кривизна имеют стандартные интерпретации.

Строка 2: Теория Янга-Миллса. Здесь потенциалы B (или A) могут трактоваться как связности, поле F играет роль кривизны. Уравнения движения не являются уравнениями геодезических, но уравнениями для отклонений от геодезических. Знак вопроса здесь подразумевает отсутствие в теории аналога пространственной метрике.

Строка 3: Калибровочные теории гравитации. Поскольку потенциалы в теории Янга-Миллса играют роль связности, то можно предположить, что обычная метрика — гравитационный потенциал — также может играть роль некой связности. Но ясности в этом вопросе нет и пока не видно никакого пути его возможного решения. Статус кривизны также не определен.

Строка 4: Теории типа Калуцы-Клейна. Потенциал Янга-Миллса трактуется как связность, но встраивается в метрику. Геометрический статус связности неоднозначен.

Строка 5: Теории на основе финслеровой геометрии. Потенциалы являются частью метрики, что хорошо соотносится с ОТО, где метрика играет роль потенциала поля (табл.).

Например, тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ является частью связностей и появляется в уравнении Лоренца именно там, где нужно. Кроме того, можно показать, что кривизна, вычисленная из метрики, содержит член, совпадающий с тензором энергии-импульса электромагнитного поля. Это означает, что энергия электромагнитного поля может быть выведена геометрически и не требует специального введения в уравнения Эйнштейна. В этой теории все потенциалы входят в метрику, которая преобразуется как обычная метрика, и все физические поля входят в связности, которые преобразуются как обычные связности, тензоры энергии-импульса всех полей выводятся из тензора кривизны таким образом, что уравнение Эйнштейна реализуется само собой.

На основе сказанного выше мы делаем заключения.

1. Геометрия Финслера является естественным обобщением для всех геометрических построений, лежащих в основе современных полевых моделей.

2. Существует, не реализованная пока, возможность построения единой теории поля (включающей, в том числе, гравитацию), базирующейся на принципах финслеровой геометрии и включающей в себя другие модели как частный случай.

Список литературы

1 Арнольд В.И. Математика и физика: родитель и дитя или сестры? / В.И. Арнольд // Успехи физических наук. — 1999. — Т. 170. — № 12. — С. 1311–1323.

2 Арынгазин К.М. Геометрические идеи как метод расширения физики / К.М. Арынгазин, Ю.Е. Зубарева / Физика в системе современного образования: материалы 12-й международной научной конференции. — Петрозаводск, 2013. — С. 314–320.

3 Zhotikov V.G. Finsler geometry (according to Wagner) and the equations of the motion in the relativistic dynamics / V.G. Zhotikov // Физические интерпретации теории относительности: материалы XV международной научной конференции. — М., 2009. — С. 133–144.

4 Арынгазин К.М. Геометрические идеи в теоретической физике / К.М. Арынгазин. — Алматы: Рауан, 1994. — 360 с.

5 Арынгазин К.М. Геометрические идеи — как метод построения и изложения теоретической физики / К.М. Арынгазин, И.Ф. Васильева // Физическое образование в вузах. — 2012. — Т. 18. — № 3. — С. 3–15.

6 Ходос А. Теория Калуцы-Клейна. Общий обзор / А. Ходос // Успехи физических наук. — 1985. — Т. 146. — № 8. — С. 647–654.

7 Вагнер В. Гомологическое преобразование метрики Финслера / В. Вагнер // ДАН СССР. — 1945. — Т. 46. — № 7. — С. 287.

8 Perlick V. Fermat Principle in Finsler Spacetimes / V. Perlick // arXiv:gr-qc/0508029v1 8 Aug 2005. — 18 p.

9 Chern Sh.-Sh. Finsler Geometry Is Just Riemannian Geometry Without the Quadratic Restriction / Sh.-Sh. Chern // Notices of the AMS. — 1996. — Vol. 43. — No. 9. — 959–963 p.

10 Beil R.G. Finsler Geometry and Relativistic Field Theory / R.G. Beil // Foundations of Physics. — 2003. — Vol. 33. — No. 7. — 1107–1127 p.

К.М. Арынгазин, В.В. Архипов, А.С. Кудусов

Финслер геометриясы мен физиканың іргелі қағидалары

Мақала Финслер геометриясының потенциалдық мүмкіндіктерін талдауға, яғни өзара әрекеттесудің жалпыланған теориясын құруға, арналған. Финслер геометриясы риман геометриясының жалпыланған түрінің бірі болып табылады. Финслер геометриясында финслер метрикасымен саналуандығы, яғни нүктеден нүктеге ауысатын әрбір жанама кеңістікке норма таңдаумен, қарастырылады. Кеңістік-уақыттың Финслер геометриясы финслер метрикалық функциясын инвариантты түрді қалдыратын жанама векторлардың түрлендіру топтары ұғымына сүйене отырып, әртүрлі ішкі симметриялармен физикалық өрістердің теориясын дамытуға мүмкіндік береді. Авторлар финслер геометриясының жалпы қасиеттері және олардың классикалық жағдайларын редукциялануын талқылады. Финслер геометриясы жалпы салыстырмалық теориясы, Янг-Миллс теориясы, калибрлік гравитация, Калуц-Клейн теориялары сияқты, барлық негізгі теориялық-өрістік модельдердің геометриялық негіздерінің нақты жалпылауы болатындығын көрсетті. Теорияны салыстыру негізінде болашақ ұлы біріктіру теориясының геометриялық қасиеттері туралы болжам жасалды. Физикаға Финслер геометриясын мағыналы енгізу классикалық және кеңінен танымал есептерге жаңа қырынан қарауға, сондай-ақ күрделі салаларда жаңа тұжырымдамаларды құруға көмектесуі мүмкін.

Кілт сөздер: Финслер геометриясы, өріс теориясы, өзара әрекеттестіктің жалпы теориясы, метрика, іріктеу өрісі.

K.M. Aryngazin, V.V. Arkhipov, A.S. Kudussov

Fundamental principles of physics and Finsler geometry

The present work is devoted to the analysis of Finsler geometry. More exactly there are investigated its possibilities to be a basis for generalized theories of interactions. Finsler geometry is one of the generalizations of Riemannian geometry. In Finslerian geometry, manifolds with a Finsler metric are considered; That is, the choice of the norm on each tangent space that varies smoothly from point to point. Finsler's geometrization of space-time makes it possible to develop the theory of physical fields with various internal symmetries, relying on the notion of the group of transformations of tangent vectors leaving the Finsler invariant metric function. The common properties of Finsler geometry and their reductions to classical cases are discussed. It is shown that Finsler geometry is a natural generalization for geometrical bases of all basic theoretical models like General Relativity, Yang-Mills theory, gauge gravity, Kaluza-Klein theories. On the comparison of the theories the properties of the future relevant grand unification theory are predicted. The meaningful application of Finsler geometry to physics can help to take a fresh look at classical and widely known problems, and also help in building new approaches in problem areas.

Keywords: Finsler geometry, field theory, general theory of interactions, metric, gauge fields.

References

1 Arnold, V.I. (1999). Matematika i fizika: roditel i ditia ili sestry? [Math and Physics: The Parent and Child or the Sisters?]. *Uspekhi fizicheskikh nauk — Successes of physical sciences, 170, 12*, 1311–1323 [in Russian].

2 Aryngazin, K.M., & Zubareva, Yu.E. (2013) Heometricheskie idei kak metod rasshireniia fiziki [Geometrical Ideas as a Generalization Method for Physics]. Proceedings from the Physics in the System of Modern Education: *12 mezhdunarodnaya nauchnaia konferentsiia — 12-th International Scientific Conference* (pp. 314–320). Petrozavodsk [in Russian].

3 Zhotikov, V.G. (2009) Finsler geometry (according to Wagner) and the equations of the motion in the relativistic dinamics. Proceedings from the Physical Interpretations of Relativistic Physics: *XV mezhdunarodnaia nauchnaia konferentsiia — XV International Scientific Meeting* (pp. 133–144). Moscow.

4 Aryngazin, K.M. (1994). *Heometricheskie idei v teoreticheskoi fizike [Geometrical Ideas in Theoretical Physics]*. Almaty: Rauan [in Russian].

5 Aryngazin, K.M., & Vassileva, I.F. (2012). Heometricheskie idei kak metod postroeniia i izlozheniia teoreticheskoi fiziki [Geometrical Ideas as a Method for Building and Statement of Theoretical Physics]. *Fizicheskoe obrazovanie v vuzakh — Physical education in high schools, 18, 3*, 3–15 [in Russian].

6 Khodos, A. (1985). Teoriya Kaluzy-Kleina. Obschii obzor [Kaluza-Klein Theory. The Overall Review]. *Uspekhi fizicheskikh nauk — Successes of physical sciences, 146, 8*, 647–654 [in Russian].

7 Vagner, V. (1945). Homolohicheskoe Preobrazovanie metriki Finslera [Gomological Transformations of Finsler Metrics]. *DAN SSSR — DAN USSR, 46, 7* [in Russian].

8 Perlick, V. Fermat Principle in Finsler Spacetimes // arXiv:gr-qc/0508029v1 8 Aug 2005.

9 Chern, Sh.-Sh. (1996). Finsler Geometry Is Just Riemannian Geometry Without the Quadratic Restriction. *Notices of the AMS, 43, 9*.

10 Beil, R.G. (2003). Finsler Geometry and Relativistic Field Theory. *Foundations of Physics, 33, 7.*