ӘОЖ 656.13.09

Белгілі бір торлық есеп үшін динамикалық программалау әдісін қолдану

Application of the method of dynamic programming for one network problem

Омаров А.М., Есендаулетова Ж.Т.

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті (E-mail: dalibiev@mail.ru)

В статье рассматривается задача нахождения кратчайшего расстояния от источника к стоку. Данная задача может быть реализована двумя способами: методом дискретного программирования на основе комбинаторики путем последовательного перебора всех вершин заданной сети и методом динамического программирования, основанном на функциональном уравнении Беллмана, распадающемся на два этапа: условная оптимизация и безусловная оптимизация. При нахождении оптимального решения сетевой задачи метод динамического программирования является более рациональным и эффективным по отношению к другим методам, причем на каждом этапе итерационного процесса не происходит ошибок вычислений.

The problem of a finding the shortest distance from a source to a drain is considered in the article. The given problem can be realized in two ways: a method of discrete programming on the basis of combination theory by consecutive search of all tops of the set network. Other way is a method of the dynamic programming, based on the functional equation of Bellman which breaks up to two stages: the first stage is a conditional optimization; and the second — unconditional optimization. The method of dynamic programming is more rational and effective in relation to other methods, and at each stage of iterative process there are no errors of calculations at a finding of the optimum decision of a network problem.

Бүтін сандық программалау есептерінің бірі болып табылатын, ізделінетін есептің экстремалдық шешімін кейбір белгілі сандар жиынтығын алмастыруын сипаттау арқылы алынатын есеп үлкен қызығушылық танытады. Бұл есептер комбинаторлық типті есептер деген атқа ие болды.

Бүтін сандық типтің сызықтық есебін қию әдісімен шешу барысында міндетті түрде олардың кемшіліктеріне көңіл аудару керек, себебі практикалық есептің шешімін алуға мүмкіндік бермейтін жағдайды туғызуы мүмкін. Біріншіден, бұл бірнеше рет бағаларды тізбектеп дәлдеу әдісінің қолданылуымен және осымен байланысты есептеу қателіктерімен; екіншіден, $\gamma_0^k \geq \sum_{j \in N_k} \gamma_j^k x_j$ формуласы бойынша қосымша сызықтық шектеулерді құрумен түсіндіріледі, мұндағы γ_j^k – қателіктер мәні. Мұндай кемшіліктер варианттардың тізбектелген талдауы әдісінде кездеспейді.

Варианттардың тізбектелген талдауы әдісінің схемасына Р.Беллман атымен байланысқан динамикалық программалау әдісі; Литтл, Суин, Карел [1] аттарымен байланысқан буындар мен шекаралар әдістері жатады. Варианттарды тізбектеп талдау әдісінің қию әдісінен айырмашылығы, бұл әдіс сызықтық программалау аппаратын мүлдем пайдаланбайды және есептеу қателіктерін жібермейді.

Динамикалық программалау әдісі — бұл басқарудың жіберуші дискретті жиынымен берілген математикалық программалау есептерінің тиімді шешімін жылдам табуға мүмкіндік беретін құрал, яғни әр түрлі шешімдерді алып келетін, беталыстың әр түрлі варианттарының кейбір көрсеткіштерінің арасынан ең жақсысын таңдап алу керек. Осы тәріздес кез келген есептің шешімін мүмкін болатын барлық варианттарды теру жолымен және олардың арасынан ең жақсысын таңдау арқылы алуға болады. Бірақ мұндай теру қиындық туғызуы мүмкін. Мұндай жағдайда тиімді шешімді қабылдау процесі қадамдарға бөлініп, динамикалық программалау әдісімен зерттелуіне мүмкіндік алады. Динамикалық программалау әдісін пайдаланып жалпы түрде есептің шешімін қарастырайық [2].

Айталық, тиімдеу процесі n қадамға бөлінсін делік. Әрбір қадамда екі типті айнымалыларды анықтау қажет — s жағдай айнымалысын және x басқару айнымалысын. s айнымалысы жиынның берілген k-қадамда қандай жағдайларда болатын мүмкіндігін анықтайды. s айнымалысына байланысты осы қадамда кейбір x_k айнымалысымен сипатталатын басқаруды пайдалануға болады. x басқаруын k-қадамда пайдалану $w_k(s, x_k)$ кейбір нәтижесін береді және жүйені кейбір жаңа $s'(s, x_k)$ жағдайына ауыстырады. Сонымен, жүйе ауысқан $s'(s, x_k)$ жағдайы берілген s жағдайымен таңдалынған x_k басқаруына байланысты деп және жүйе s жағдайына қандай жолмен ауысқанына байланысты емес деп болжаймыз. k-шы қадамда әрбір мүмкін болатын жағдай үшін мүмкін болатын барлық басқарулар ішінен x_k^* тиімді басқаруы таңдалынады, оның k-шы мен n-ші қадамдар аралығында алынатын нәтижесі тиімді болу керек.

Ары қарай k-қадамды жүзеге асыру нәтижесінде белгілі бір кіріс немесе ұтыс қамтамасыз етіледі деп санаймыз, ол s жүйесінің алғашқы жағдайы мен таңдалынған x_k басқаруына байланысты және $F=\sum_{k=1}^{n} w_k(s,x_k)$ тең болады. Сонымен, біз екі шартты тұжырымдадық, ол шарттарды қарастырылатын динамикалық программалау есебі қанағаттандыру қажет. Әдетте бірінші шартты — салдары жоқ шарт, ал екіншісін — есептің мақсаттық функциясының аддитивті шарты деп атайды.

Бірінші шарттың динамикалық программалау есебі үшін орындалуы Беллманның тиімді принципін тұжырымдауға мүмкіндік береді. Мұны орындамай тұрып, басқарудың тиімді стратегиясына анықтама берейік. *Басқарудың тиімді стратегиясы* деп $X^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ басқарулар жиынтығын түсінуге болады.

Тиімдеу принципі. Шартты тиімдеу, немесе шартты тиімді басқару, деп аталатын есепті шешудің бірінші кезеңінде Беллман функциясы мен соңынан басталатын әрбір қадамдағы барлық мүмкін болатын жағдайлар үшін тиімді басқарулар ізделінеді.

Жоғарыдағыны практикалық жүзінде іске асыру үшін тиімділеу принципінің математикалық тұжырымын беру қажет. Ол үшін кейбір қосымша белгілеулерді енгіземіз. $F_n(s^0)$ -пенен басқарудың тиімді стратегиясы $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ іске асыра отырып, жүйенің алғашқы s^0 жағдайынан соңғы s^n жағдайына көшкендегі n қадамдарынан алынған ең үлкен кірісті белгілейік, ал $F_{n-k}(s^k)$ -пенен қалған n-k қадамдарындағы басқарудың тиімді стратегиясын іске асыра отырып, жүйенің кез келген s^k жағдайынан соңғы s^n жағдайына көшуде алынған ең үлкен кірісті белгілейік.

Сонда

$$F_n(s^0)=\max_{x_k+1}[w_1(s^0,x_1)+...+w_n(s^{(n-1)},x_n)];$$

$$F_{n-k}(s^{(k)})=\max_{x_k+1}[w_{k+1}(s^{(k)},x_{k+1})+F_{n-k-1}(s^{(k+1)})](k=\overline{0,n-1}). \quad (1)$$

Соңғы көрсетілген өрнек тиімді принципті математикалық жазуды көрсетеді және Беллманның *негізгі функционалдық теңдеуі,* немесе рекурренттік сәйкестік, деп аталынады. Берілген теңдеуді пайдаланып, динамикалық программалау есебінің шешімін табамыз. Берілген процесті толығырақ қарастырайық.

(1) рекуренттік сәйкестігінде k=n-1 деп алып, келесі функционалдық теңдеуді аламыз:

$$F_1(s^{(n-1)})=\max_{x_n}[w_n(s^{(n-1)},x_n)+F_0(s^{(n)})]. \quad (2)$$

Бұл теңдеуде $F_0(s^{(n)})$ белгілі деп санаймыз. (2)-теңдеуді пайдаланып және жүйенің (n-1)-қадамындағы мүмкін болатын жіберілетін жағдайларын $s_1^{(n-1)},s_2^{(n-1)},...,s_m^{(n-1)},...$ қарастыру арқылы шартты тиімді шешімді табамыз

$$x_n^0(s_1^{(n-1)}),x_n^0(s_2^{(n-1)}),...,x_n^0(s_m^{(n-1)}),...,$$

және (2)-функцияның сәйкес келетін мәндерін табамыз

$$F_1^0(s_1^{(n-1)}),F_1^0(s_2^{(n-1)}),...,F_1^0(s_m^{(n-1)}),...,.$$

Сонымен, n-шы қадамда жүйенің (n-1)-қадамынан кейінгі кез келген жіберілетін жағдайы ескерілген шартты тиімді басқаруды табамыз.

Енді k=n-2 болғандағы функционалдық теңдеуді қарастыруға көшеміз:

$$F_2(s^{(n-1)})=\max_{x_{n-1}}[w_{n-1}(s^{(n-2)},x_{n-1})+F_1(s^{(n-1)})].$$

Барлық $s^{(n-2)}$ жіберілетін мәндерге арналған F_2 мәнін табу үшін $w_{n-1}(s^{(n-2)},x_{n-1})$ және $F_1(s^{(n-1)})$ білу қажет. Мұндағы $F_1(s^{(n-1)})$ мәндері анықталған. Кейбір $s^{(n-2)}$ мәндері мен x_{n-1} сәйкес келетін жіберілетін жиындар көмегімен $w_{n-1}(s^{(n-2)},x_{n-1})$ үшін есептеулерді жүргізу қажет. Осы есептеулер әрбір $s^{(n-2)}$ үшін x_{n-1}^0 шартты тиімді басқаруды анықтауға мүмкіндік береді. Алдында таңдалынған басқарулармен бірге осындай әрбір басқарулар соңғы қадамда кірістің соңғы екі қадамындағы ең көп мәнін қамтамасыз етеді.

Жоғарыда сипатталған итерациялық процесті тізбектеп іске асыру арқылы бірінші қадамға да жетеміз. Осы қадамда жүйе қандай жағдайда болатыны белгілі. Сондықтан да жүйенің жіберілетін жағдайларын жобалаудың енді қажеті жоқ, тек қана басқарудың шартты тиімділігінде ескерілген ең жақсы болып табылатын басқаруды таңдау ғана қалады.

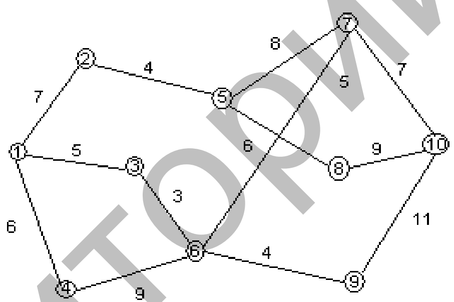
n-нен біріншіге дейінгі барлық қадамдар үшін Беллман функциясы және сәйкес келетін тиімді басқарулар табылғаннан кейін, *шартсыз тиімдеу* деп аталатын есеп шешімінің екінші кезеңі жүргізіледі. Бірінші (k=1) қадамдағы жүйе жағдайы белгілі (s_0 — алғашқы жағдайы) екендігін пайдаланып, барлық n қадамдар үшін тиімді шешімді табуға болады және де нәтиже беретін x_1^* бірінші қадамдағы тиімді басқаруды. Осы басқаруды қолданғаннан кейін жүйе кейбір жаңа $s'(s,x_1^*)$ жағдайына көшеді, осыған сүйеніп, шартты тиімдеу кезеңіндегі нәтижелерді пайдалану арқылы, x_2^* екінші қадамдағы тиімді басқаруды табуға болады және ары қарай тағы сол сияқты *n*- қадамға дейін.

Осы жалпы схеманы түсіндіру үшін, есептің мазмұны жағдай айнымалысын таңдауды және әр түрлі типтерді басқаруды талап ететін есептің шешімін қарастырайық.

Есептің қойлымы. Транспорттық тор *n* буындардан тұрады, олардың кейбірі магистральдармен байланысқан. Әрбір магистраль бойынша жол құны белгілі және схемада белгіленген. 1-пункттен *n*-пунктіге дейінгі жол жүрудің тиімді маршрутын анықтау қажет.

Берілген есепті шешу жалпы жағдайда үлкен көлемді есептеулермен түйіндескен.

Айталық, тор 10 буыннан (қалалардан) тұрсын делік және олар бір-бірімен магистральдар арқылы байланыссын делік (сур. қара).



1-сур. Торлар схемасы

i пунктінен *j* пунктіне дейінгі жол жүру құны t_{ij} тең, және осы матрицаның элементтері схемаға енгізілген (сур.).

1-пунктінен 10-пунктіге дейінгі жол жүрудің тиімді маршрутын анықтау қажет.

Берілген есепте шектеу бар — схемада көрсетілген магистральдар бойынша тек қана солдан оңға қарай ғана қозғалыс жасауға болады, яғни, мысалы, 7-пунктіге түссек, онда біз тек қана 10-шыға ғана көшуге құқығымыз бар және 5 немесе 6-ға орала алмаймыз. Бұл (берілген схеманың ерекшеліктер жиынтығымен) бізге әрбір 10 пунктілерді 4 белдеудің біреуіне жатқызуға болады дегенді білдіреді. Пункт *k*-шы белдеуге тиісті деп айтайық, егер де одан нақты *k* қадам арқылы соңғы (10-шы) пунктіге жететін болсақ, яғни нақты *k*-1 аралық пунктісіне кіру арқылы. Сонымен, 7, 8 және 9 пунктілері бірінші белдеуге, 5 және 6 — екінші белдеуге, 2, 3 және 4 — үшінші белдеуге және 1 — төртінші белдеуге тиісті болады. *k*-шы белдеудегі қалалардан соңғы пунктіге дейінгі тиімді маршруттарды *k*-қадамда табатын боламыз. Сонымен, тиімділікті процестің соңынан жүргізетін боламыз, яғни, *k*-қадамға жеткеннен кейін, *k*-белдеудің нақты қай қаласына түсетінімізді біз біле алмаймыз. Сондықтан, әрбір осы қалалар үшін соңғы пунктіге дейінгі тиімді маршрутты табу қажет. *k*-белдеудегі қалалардан 10 пунктіге дейінгі жол жүрудің мүмкін болатын ең аз құны, тек қана осы белдеудің қай қалаларына тап болатынымызға байланысты болады. *k*-белдеуге тиісті *s* қаласының нөмірі, *k*-қадамдағы берілген жүйенің жағдай айнымалысы деп аталынады. (*k*-1)-белдеуге тиісті қаланың нөмірі k-қадамдағы басқару айнымалысы болып табылады. $F_k(s)$ есебінің k-қадамының шешіміндегі Беллман функциясы деп, s қаласынан соңғы пунктіге дейінгі жол жүрудің мүмкін болатын ең аз құнын атаймыз. Бірінші қадам (k=1) үшін бұл өлшемді іздеу қиын емес — бұл 1-белдеудің қалаларынан соңғы пунктіге дейінгі жол жүру құны: $F_1(s) = t_{s10}$.

I-кезең. *Шартты тиімділеу*

1-қадам. k=1.

$$F_1(s) = t_{s10}$$

s\\J	10	$F_1(s)$	J*
7	7	7	10
8	9	9	10
9	11	11	10

Келесі қадамдар үшін жол құны екі қосылғыштың қосындысынан k-белдеуді s қаласынан (k-1)-белдеуді J қаласына дейінгі жол құны t_{SJ} және J қаласынан соңғы пунктіге дейінгі мүмкіндігінше аз болатын жол құнынан тұрады, яғни $F_{k-1}(J)$.

2-қадам. k=2.

$$F_2(s) = \min_J \{t_{SJ} + F_1(J)\}$$

s\J	7	8	9	$F_2(s)$	J*
5	8+7	6+9	-	15	7,8
6	5+7	-	4+11	12	7

Сонымен, берілген қадамдағы барлық мүмкін болатын басқаруларды теру арқылы, соңғы пунктіге дейінгі ең аз жол құнын табуға болады.

$$F_k(s) = \min_J \{t_{SJ} + F_{k-1}(J)\}.$$

3-қадам. k=3.

$$F_3(s) = \min_J \{t_{SJ} + F_2(J)\}$$

s\J	5	6	$F_3(s)$	J*
2	4+15	-	19	5
3	-	3+12	15	6
4	-	9+12	21	6

s пунктісінен соңғы пунктіге дейінгі қозғалыстың тиімді бағыты болып табылатын кейбір J^* мәнінде баға минимумына қол жеткізіледі.

Төртінші қадамда біз 4-белдеуге тап боламыз және жүйенің жағдайы анықталған s=1 түрінде болады. 1-пунктіден 10-пунктіге орын ауыстыру барысында аз мөлшерде шығындалу $F_4(1)$ Беллман функциясы арқылы көрініс табады. k-қадамда кейбір J басқаруын таңдау, (k-1)-қадамдағы жүйе жағдайын анықталған түрге әкелетінін ескере отырып, керісінше, ретпенен барлық қадамдар нәтижесін көру арқылы, тиімді маршрутты табуға болады.

4-қадам. k=4.

$$F_4(s) = \min_J \{t_{SJ} + F_3(J)\}$$

s\\J	2	3	4	$F_4(s)$	J^*
1	7+9	5+15	6+21	20	3

II-кезең. *Шартсыз тиімділеу*

1-пунктен 10-пунктіге дейінгі мүмкін болатын ең аз жол құны $v = F_4(1) = 20$ тең. Осы жол құнына қол жеткіземіз, егер де 1-пунктіден 3-пунктіге жіберілетін болса. Оған түскеннен кейін, алдындағы кестеде көрсетіліп тұрғандай, 6-пунктіге қозғалып, содан 7-пунктіге және осыдан соңғы пунктіге қозғалу қажет, яғни тиімді маршрут $1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 10$ түрінде болады.

References

1. *Larionov A.I., Jurchenko T.I.* Economic-mathematical methods in planning. — M.: High school, 1984. — 248 p.
2. *Zuhovitskij S.I., Radchik I.A.* Mathematical methods of network planning. — M.: Science, 1978. — 296 p.

УДК 517.956

Об однозначной разрешимости периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений

On one-valued solvability of the periodic boundary problem for system of the hyperbolic equations

Орумбаева Н.Т., Сабитбекова Г.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail:Orumbayevan@mail.ru)

Мақалада аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есеп қарастырылады. Гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің шешімін табудың конструктивті алгоритмі ұсынылады. Алгоритмнің жинақтылығының және зерттеліп отырған есептің шешілімдігінің жеткілікті шарттары тағайындалады.

Periodic boundary problem for system of the hyperbolic equations with mixed derivative is considered in the article. The constructional algorithm of finding periodical boundary problem's solution for system of hyperbolic equations is offered. The necessary and sufficient conditions of algorithm and one-valued solvability of investigating problem are established.

На $\overline{\Omega}=[0,\omega]\times[0,T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+C(x,t)u+f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega, \tag{1}$$

$$u(0,t)=\psi(t),\quad t\in[0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0)=u(x,T),\quad x\in[0,\omega], \tag{3}$$

где $(n\times n)$ — матрицы $A(x,t)$, $C(x,t)$ и n-вектор-функция $f(x,t)$ непрерывны на $\overline{\Omega}$; n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно-дифференцируемая на $[0,T]$ и удовлетворяет условию $\psi(0)=\psi(T)$, $\|u(x,t)\|=\max\limits_{i=\overline{1,n}}|u_i(x,t)|$, $\|A(x,t)\|=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}(x,t)|$. Пусть $C(\overline{\Omega},R^n)$ — пространство функций $u:\overline{\Omega}\to R^n$, непрерывных на $\overline{\Omega}$, с нормой $\|u\|_0=\max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|u(x,t)\|$.

Функция $u(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\in C(\overline{\Omega},R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}\in C(\Omega,R^n)$, называется решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(x,t)\in\overline{\Omega}$ и краевым условиям (2), (3), а на характеристике $x=0$ принимает заданные значения $\psi(t)$, $t\in[0,T]$.

Краевые задачи для систем гиперболических уравнений были исследованы различными методами многими авторами [1–5]. В работе [6] более общая нелокальная задача исследовалась методом введения функциональных параметров. Были установлены достаточные условия однозначной разрешимости в терминах коэффициентов и предложен алгоритм нахождения ее решения, каждый шаг которого состоит из двух пунктов: нахождение введенных функциональных параметров; нахождение решения задач Гурса на малых областях.