

Таким образом, определена функция $u(x, t)$, характеризующая закон движения струны, если известно уравнение процесса и заданы дополнительные условия, полностью определяющие краевую задачу.

References

1. *Ditkin V.A., Prudnikov A.P.* Integral transformations and the operational calculation. — М.: Science, 1974. — 542 p.
2. *Galicin A.S., Jukovsky A.N.* Integral transformations and special functions in problems of heat conduction. — Kiev: Nauk. dumka, 1976. — 282 p.
3. *Volkov I.K., Kanatnikov A.N.* Integral transformations and the operational calculation. — М.: The moskery of MSTU named N.A. Bauman, 2002. — 225 p.
4. *Lenyuk M.P.* Integral transformations with divided variables (Fourier, Henkel). — Kiev: IM AS USSR, 1983. — 60 p.
5. *Budak B.M., Samarsky A.A., Tihonov A.H.* The collected problems for mathematical physics. — М.: Science, 1972. — 687 p.

УДК 517.51

Применение z-преобразования к исследованию одного разностного уравнения

The application of z-transformation to the research of one difference equation

Есенбаева Г.А.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

Мақалада z-түрлендіру мен оның қасиеттері, берілген шарттары мен бір айырымдық теңдеуі қарастырылған, сондай-ақ теңдеудің ерекшеліктері, z-түрлендіруді қолдана отырып, табылған шешімі зерттелген.

In the given article the qualitative properties of z-transformation, the one difference equation with the given conditions, his basic properties and also the solution of study difference equation with the application of z-transformation have been investigated.

В приложениях часто вместо функции времени $f(t)$ задается последовательность значений f_n ($n = 0, 1, \dots$), измеренных через определенные промежутки времени, например, в моменты времени $t = 0, 1, \dots$. Задачи, возникающие в связи с исследованием последовательностей, могут решаться либо применением преобразования Лапласа к соответствующим ступенчатым функциям, либо более кратким путем, посредством дискретного преобразования Лапласа самих последовательностей. Однако вычисления становятся еще более простыми, если использовать z -преобразование [1].

z -преобразование переводит последовательность-оригинал f_n в изображение $F(z)$, которое является функцией комплексного переменного, посредством следующего соотношения [2]:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \equiv z\{f_n\}.$$

Известно, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$ сходится вне некоторого круга комплексной плоскости, т.е. при $|z| > R \geq 0$. Необходимым и достаточным условием существования такого круга (т.е. чтобы его радиус R не был равен бесконечности) является существование двух таких положительных постоянных K и k , что $|f_n| < K \cdot k^n$. Изображение $F(z)$ представляет собой при $|z| > R$, включая $z = \infty$, аналитическую функцию, поэтому все ее особенности лежат внутри круга $|z| \leq R$ [1].

Формула обращения при z-преобразовании имеет вид

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1} dz \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где C — любой замкнутый контур, окружающий все особые точки функции $F(z)$, в частности, любая окружность $|z| > R$ [2].

Каждой последовательности f_n , удовлетворяющей условию $|f_n| < K \cdot k^n$, однозначно соответствует функция $F(z)$, аналитическая во внешности круга: $|z| > R$, включая ∞ , но при этом $R \leq k$. Обратное, каждая такая функция однозначно определяет последовательность f_n [1].

Вместо записи $z\{f_n\} = F(z)$ будем иногда пользоваться записью $f_n \leftrightarrow F(z)$.

Первая теорема смещения [1]. $f_{n-k} \leftrightarrow z^{-k} F(z)$ при $k = 0, 1, 2, \dots$ при условии, что при $n - k < 0$ принимается $f_{n-k} = 0$.

Вторая теорема смещения [1]. $f_{n+k} \leftrightarrow z^k \left[F(z) - \sum_{v=0}^{k-1} f_v z^{-v} \right]$ при $k = 1, 2, \dots$

Теорема о свертке [1]. Свертке двух оригиналов-последовательностей соответствует умножение изображений

$$\sum_{v=0}^n f_v g_{n-v} \leftrightarrow F(z)G(z).$$

Разностные уравнения являются наиболее простыми представителями класса функциональных уравнений с отклоняющимся аргументом. Применения таких уравнений пронизывают все ветви современной науки. Разностные уравнения используются в теории электрических цепей, переходных процессов, теории вероятностей, статике сооружений, химии, физике и др., а также для приближенного решения дифференциальных уравнений [3, 4].

Линейные разностные уравнения имеют вид

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y(x + h_k) = \sum_{k=0}^m P_k(x) y_k = f(x),$$

где $P_k(x)$, $f(x)$ — заданные функции; h_k — постоянные разности (отклонения) [3].

В то время как для решения дифференциальных уравнений удобным инструментом является преобразование Лапласа, для решения разностных уравнений более эффективно z-преобразование.

Рассмотрим линейное разностное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами, содержащее в левой части линейную комбинацию искомой последовательности y_n и ее разностей Δy_n , $\Delta^2 y_n$, $\Delta^3 y_n$, а в правой части — заданную последовательность f_n , которую путем перехода к явным выражениям разностей можно привести к виду

$$y_{n+3} + c_2 y_{n+2} + c_1 y_{n+1} + c_0 y_n = f_n \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (1)$$

Коэффициент c_3 при наивысшей разности y_{n+3} примем, как в случае дифференциальных уравнений, равным единице.

Для того чтобы решение уравнения (1) получилось вполне определенным, должны быть заданы начальные значения y_0, y_1, y_2 . Тогда, положив в уравнении (1) $n = 0$, можно вычислить из него следующее за y_2 значение y_3 и т.д. Следовательно, все значения y_n можно вычислить последовательно, рассматривая (1) как рекуррентное уравнение. Однако выведем для y_n общую формулу при помощи z-преобразования.

Согласно второй теореме смещения разностное уравнение (1) после z-преобразования переходит в изображающее уравнение

$$z^3 [Y(z) - y_0 - y_1 z^{-1} - y_2 z^{-2}] + c_2 z^2 [Y(z) - y_0 - y_1 z^{-1}] + c_1 z [Y(z) - y_0] + c_0 Y(z) = F(z),$$

где

$$Y(z) = z\{y_n\}, \quad F(z) = z\{f_n\}.$$

Как и при решении дифференциальных уравнений посредством преобразования Лапласа, так и теперь в изображающее уравнение входят, а потому учитываются начальные значения, что является большим преимуществом по сравнению с классическим методом решения разностных уравнений.

Введя обозначение

$$z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = p(z),$$

получим решение изображающего уравнения в виде

$$Y(z) = \frac{1}{p(z)} F(z) + y_0 \frac{z(z^2 + c_2 z + c_1)}{p(z)} + y_1 \frac{z(z + c_2)}{p(z)} + y_2 \frac{z}{p(z)}. \quad (2)$$

Входящие в это решение функции $\frac{z^\mu}{p(z)}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) – аналитические вне круга, содержащего особенности многочлена, причем также в бесконечности, следовательно, представляют собой изображения. Соответствующие им оригиналы-последовательности удобнее всего определить следующим образом.

В частном случае $f_n \equiv 0$ имеем однородное разностное уравнение

$$y_{n+3} + c_2 y_{n+2} + c_1 y_{n+1} + c_0 y_n = 0, \quad (3)$$

поэтому $F(z) \equiv 0$. Пусть заданы начальные значения

$$y_0 = y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad (4)$$

тогда искомой последовательности y_n соответствует, согласно (2), изображение

$$Y(z) = \frac{z}{p(z)}. \quad (5)$$

С другой стороны, искомое решение y_n можно определить в явном виде на основе результатов, полученных для дифференциальных уравнений [4]. В самом деле, положив

$$\frac{1}{p(s)} = G(s),$$

найдем, что в области преобразования оригинал $g(t)$ обладает свойствами

$$g'''(t) + c_2 g''(t) + c_1 g'(t) + c_0 g(t) = 0; \quad (6)$$

$$g(0) = g'(0) = 0, \quad g''(0) = 1. \quad (7)$$

Если продифференцировать уравнение (6) n раз и затем положить $t = 0$, то получим

$$g^{(n+3)}(0) + c_2 g^{(n+2)}(0) + c_1 g^{(n+1)}(0) + c_0 g^{(n)}(0) = 0.$$

Это соотношение означает следующее: если рассматривать $g^{(n)}(0)$ как последовательность, зависящую от индекса n , то она будет удовлетворять разностному уравнению (3). Далее равенства (7) показывают, что эта последовательность имеет начальные значения (4).

Так как решение задачи Коши единственно (это следует из указанного выше рекуррентного характера вычислений), то $g^{(n)}(0)$ есть решение разностного уравнения (3) с начальными условиями (4), причем ему соответствует изображение (5). Следовательно, при z -преобразовании имеет место соответствие

$$\frac{z}{p(z)} \leftrightarrow g^{(n)}(0).$$

Эта форма оригинала-последовательности обладает преимуществом: она имеет общий характер и не зависит от того, являются ли все нули многочлена $p(z)$ различными, или среди них встречаются кратные.

Для обратного перевода решения (2) изображающего уравнения в пространство оригиналов, необходимо найти оригиналы-последовательности, соответствующие изображениям $\frac{1}{p(z)}$ и $\frac{z^\mu}{p(z)}$ ($\mu = 1, 2, 3$).

Согласно первой теореме смещения имеем

$$\frac{1}{p(z)} = z^{-1} \frac{z}{p(z)} \leftrightarrow g^{(n-1)}(0),$$

при условии, если при $n-1 < 0$ принять $g^{(n-1)}(0) = 0$, т.е. положить $g^{(-1)}(0) = 0$.

Согласно второй теореме смещения и на основании равенств (7) получаем

$$\frac{z^\mu}{p(z)} \leftrightarrow g^{(n+\mu-1)}(0) \quad \text{при} \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (g^{(-1)}(0) = 0).$$

Применив к первому члену изображения (2) теорему о свертке, получим:

$$\sum_{v=0}^n g^{(n-1)}(0) f_{n-v}.$$

Заметим, что суммирование следует вести только от индекса $v = 3$ до n , так как $g^{(-1)}(0) = 0$ и, кроме того, на основании равенств (7) $g^{(v-1)}(0) = 0$ при $v = 1, 2$; при $n = 0, 1, 2$ указанная сумма равна нулю.

Обратный перевод решения (2) изображающего уравнения в пространство оригиналов окончательно приводит к результату

$$y_n = \sum_{v=3}^n g^{(v-1)}(0) f_{n-v} + \sum_{i=0}^2 y_i \sum_{k=i+1}^3 c_k g^{(n+k-i-1)}(0),$$

или, если положить $k-i-1 = l$,

$$y_n = \sum_{v=3}^n g^{(v-1)}(0) f_{n-v} + \sum_{i=0}^2 y_i \sum_{l=0}^{3-i-1} c_{l+i+1} g^{(n+l)}(0).$$

Если нули многочлена $p(z)$ известны, то функцию $g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p(z)} \right\}$ можно вычислить одним из способов, указанных в [1]. Если все нули $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ многочлена $p(z)$ различные, т.е. простые, то согласно [1]

$$g(t) = \sum_{\mu=1}^3 \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} e^{\alpha_\mu t},$$

поэтому

$$g^{(\lambda)}(0) = \sum_{\mu=1}^3 \frac{\alpha_\mu^\lambda}{p'(\alpha_\mu)}.$$

В этом случае решение примет вид

$$y_n = \sum_{v=3}^n f_{n-v} \sum_{\mu=1}^3 \frac{\alpha_\mu^{v-1}}{p'(\alpha_\mu)} + \sum_{i=0}^2 y_i \sum_{l=0}^{3-i-1} c_{l+i+1} \sum_{\mu=1}^3 \frac{\alpha_\mu^{n+l}}{p'(\alpha_\mu)}.$$

Первая часть этой формулы дает решение неоднородного разностного уравнения, если все начальные значения равны нулю, т.е. когда система, описываемая разностным уравнением, выходит из состояния равновесия под влиянием внешнего воздействия. Вторая часть формулы дает решение однородного разностного уравнения, когда система при каких-то начальных значениях не подвержена внешним воздействиям. В этом случае решение y_n представляет собой линейную комбинацию «собственных решений» α_μ^n .

В то время как в случае дифференциальных уравнений вопрос об асимптотическом поведении собственных колебаний при $t \rightarrow \infty$ решает вещественная часть величины α_μ , в случае разностных уравнений эту роль играет абсолютное значение величины α_μ . Действительно, α_μ^n при $n \rightarrow \infty$ либо стремится к нулю, либо стремится к бесконечности, либо колеблется в зависимости от того, будет ли $|\alpha_\mu| < 1$, или больше единицы, или равно единице [1].

При решении разностного уравнения (1) для перевода изображения в последовательность-оригинал удобно использовать способ разложения на простейшие дроби. Этот способ более прост, чем способ, изложенный выше.

Итак, имеем разностное уравнение третьего порядка

$$y_{n+3} + c_2 y_{n+2} + c_1 y_{n+1} + c_0 y_n = f_n, \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (1)$$

где постоянные коэффициенты c_0, c_1, c_2 , последовательность f_n , начальные значения y_0, y_1, y_2 заданы.

Используя обозначение

$$z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = p(z),$$

получим решение изображающего уравнения в виде

$$Y(z) = \frac{1}{p(z)} F(z) + y_0 \frac{z(z^2 + c_2 z + c_1)}{p(z)} + y_1 \frac{z(z + c_2)}{p(z)} + y_2 \frac{z}{p(z)}. \quad (2)$$

Пусть

$$p(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)$$

и пусть ни один из нулей a_1, a_2, a_3 не равен нулю, так как иначе было бы $c_0 = 0$, и уравнение (1) свелось бы к уравнению второго порядка для y_{n+2} .

Выполним разложение на простейшие дроби множителя $\frac{1}{p(z)}$.

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1}{(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)}.$$

1. Если a_1, a_2, a_3 — простые корни многочлена $p(z)$, то

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1}{(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)} = \frac{A_0}{z - a_1} + \frac{B_0}{z - a_2} + \frac{C_0}{z - a_3},$$

где

$$\begin{cases} A_0 + B_0 + C_0 = 0, \\ A_0(a_2 + a_3) + B_0(a_1 + a_3) + C_0(a_1 + a_2) = 0, \\ A_0 a_2 a_3 + B_0 a_1 a_3 + C_0 a_1 a_2 = 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & A_0 + B_0 + C_0 = 0, \\ & A_0(a_2 + a_3) + B_0(a_1 + a_3) + C_0(a_1 + a_2) = \\ & = (A_0 + B_0 + C_0)(a_1 + a_2 + a_3) - (A_0 a_1 + B_0 a_2 + C_0 a_3) = 0, \Rightarrow \\ & A_0 a_1 + B_0 a_2 + C_0 a_3 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

2. Среди корней многочлена $p(z)$ один корень простой, а два других совпадают между собой, т.е. второй корень кратности два

$$a_i \neq a_{i+1}, \quad a_{i+1} = a_{i+2}, \quad i = \overleftarrow{1, 2, 3}.$$

Заметим, что обозначение $i = \overleftarrow{1, 2, 3}$ означает следующее: если $i + j > 3$, где $i = 1, 2, 3$, а $j = 1, 2$, то вместо $i + j$ следует брать $i + j - 3$.

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1}{(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)} = \frac{A_i}{z - a_i} + \frac{B_i}{z - a_{i+1}} + \frac{C_i}{(z - a_{i+1})^2},$$

где

$$\begin{cases} A_i + B_i = 0; \\ -2A_i a_{i+1} - B_i(a_i + a_{i+1}) + C_i = 0; \\ A_i a_{i+1}^2 + B_i a_i a_{i+1} - C_i a_i = 1; \\ A_i + B_i = 0; \end{cases} \quad (10)$$

$$-2A_i a_{i+1} - B_i(a_i + a_{i+1}) + C_i = -2a_{i+1}(A_i + B_i) - a_i(A_i + B_i) + A_i a_i + B_i a_{i+1} + C_i = 0, \Rightarrow$$

$$A_i a_i + B_i a_{i+1} + C_i = 0. \quad (11)$$

3. Если многочлен $p(z)$ имеет один корень кратности три: $a_1 = a_2 = a_3$, то

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1}{(z - a_1)^3}.$$

Разложение на простейшие дроби для множителя при y_2 имеет вид

$$\frac{z}{p(z)} = \begin{cases} \frac{A_0 z}{z - a_1} + \frac{B_0 z}{z - a_2} + \frac{C_0 z}{z - a_3}, & \text{если } a_1, a_2, a_3 \text{ — простые корни;} \\ \frac{A_i z}{z - a_i} + \frac{B_i z}{z - a_{i+1}} + \frac{C_i z}{(z - a_{i+1})^2}, & \text{если } a_i \neq a_{i+1}, a_{i+1} = a_{i+2} \text{ при } i = \overleftarrow{1, 2, 3}; \\ \frac{z}{(z - a_1)^3}, & \text{если } a_1 = a_2 = a_3. \end{cases}$$

Согласно таблице соответствий при z-преобразовании имеем

$$\frac{z}{(z - a)^{k+1}} \leftrightarrow C_n^k a^{n-k},$$

тогда

$$\frac{z}{p(z)} \leftrightarrow q_n = \begin{cases} A_0 a_1^n + B_0 a_2^n + C_0 a_3^n, & \text{если } a_1, a_2, a_3 \text{ — простые корни;} \\ A_i a_i^n + B_i a_{i+1}^n + C_i n a_{i+1}^{n-1}, & \text{если } a_i \neq a_{i+1}, a_{i+1} = a_{i+2} \text{ при } i = \overleftarrow{1, 2, 3}; \\ \frac{n(n-1)}{2} a_1^{n-2}, & \text{если } a_1 = a_2 = a_3. \end{cases} \quad (12)$$

Учитывая вторую теорему смещения, получаем:

$$q_{n+1} \leftrightarrow z \left(\frac{z}{p(z)} - q_0 \right).$$

В случае простых корней a_1, a_2, a_3 на основании (12), (8), в случае $a_i \neq a_{i+1}, a_{i+1} = a_{i+2}, i = \overleftarrow{1, 2, 3}$, на основании (12), (10), в случае $a_1 = a_2 = a_3$ по формуле (12) имеем, что $q_0 = 0$.

$$\Rightarrow \frac{z^2}{p(z)} \leftrightarrow q_{n+1}. \quad (13)$$

Вновь используя вторую теорему смещения, приходим к следующему соответствию:

$$q_{n+2} \leftrightarrow z^2 \left(\frac{z}{p(z)} - q_0 - q_1 z^{-1} \right).$$

При простых корнях a_1, a_2, a_3 по формулам (12), (9), при $a_i \neq a_{i+1}, a_{i+1} = a_{i+2}, i = \overleftarrow{1, 2, 3}$, — по (12), (11), при $a_1 = a_2 = a_3$ — по (12) получаем, что $q_1 = 0$.

$$\Rightarrow \frac{z^3}{p(z)} \leftrightarrow q_{n+2}. \quad (14)$$

На основании первой теоремы смещения получаем

$$\frac{1}{p(z)} = z^{-1} \cdot \frac{z}{p(z)} \leftrightarrow q_{n-1}, \quad (15)$$

при условии, что q_{-1} принимается равным нулю.

Для изображения

$$Y(z) = \frac{1}{p(z)} F(z) + y_0 \frac{z^3 + c_2 z^2 + c_1 z}{p(z)} + y_1 \frac{z^2 + c_2 z}{p(z)} + y_2 \frac{z}{p(z)}$$

на основании теоремы о свертке и с учетом соотношений (13–15) оригиналом-последовательностью y_n будет

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{v=0}^n q_{v-1} f_{n-v} + y_0 (q_{n+2} + c_2 q_{n+1} + c_1 q_n) + y_1 (q_{n+1} + c_2 q_n) + y_2 q_n = \\ &= \sum_{v=0}^n q_{v-1} f_{n-v} + y_0 q_{n+2} + (y_0 c_2 + y_1) q_{n+1} + (y_0 c_1 + y_1 c_2 + y_2) q_n. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как $q_{-1} = q_0 = q_1 = 0$, то суммирование в действительности следует производить только от индекса $v = 3$ до n .

В развернутом виде решение (16) при простых корнях a_1, a_2, a_3 многочлена $p(z)$ имеет вид

$$y_n = \sum_{v=3}^n \sum_{k=1}^3 D_k a_k^{v-1} f_{n-v} + \sum_{k=1}^3 D_k a_k^n \{y_0 a_k^2 + (y_0 c_2 + y_1) a_k + y_0 c_1 + y_1 c_2 + y_2\},$$

где

$$D_1 = A_0, \quad D_2 = B_0, \quad D_3 = C_0.$$

В случае одного простого корня, а второго корня кратности два: $a_i \neq a_{i+1}, a_{i+1} = a_{i+2}, i = \overleftarrow{1, 2, 3}$, многочлена $p(z)$ решение (16) примет вид

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{v=3}^n (A_i a_i^{v-1} + B_i a_{i+1}^{v-1} + C_i (v-1) a_{i+1}^{v-2}) f_{n-v} + \\ &+ \sum_{k=i}^{i+1} D_k a_k^n \{y_0 a_k^2 + (y_0 c_2 + y_1) a_k + y_0 c_1 + y_1 c_2 + y_2\} + \\ &+ C_i a_{i+1}^{n-1} \{y_0 (n+2) a_{i+1}^2 + (n+1)(y_0 c_2 + y_1) a_{i+1} + n(y_0 c_1 + y_1 c_2 + y_2)\}, \end{aligned}$$

где

$$D_i = A_i, \quad D_{i+1} = B_i.$$

Если многочлен $p(z)$ имеет один корень кратности три: $a_1 = a_2 = a_3$, то решение (16) можно представить в виде

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{2} \sum_{v=3}^n (v-1)(v-2) \cdot a_1^{v-3} f_{n-v} + \\ &+ \frac{1}{2} a_1^{n-2} \{(n+1)(n+2) y_0 a_1^2 + n(n+1)(y_0 c_2 + y_1) a_1 + n(n-1)(y_0 c_1 + y_1 c_2 + y_2)\}. \end{aligned}$$

Способ разложения на простейшие дроби для перевода изображения в последовательность-оригинал применим и к разностным уравнениям более высоких порядков.

References

1. Dech G. The textbook to the practical application of Laplace transformation and of z-transformation. — М.: Science, 1971. — 288 p.
2. Korn G., Korn T. The reference book of mathematics for science workers and engineers. — М.: Science, 1984. — 831 p.
3. Mirolyubov A.A., Soldatov M.A. Homogeneous difference equations. — Gorky: The moskery of Gorky un-ty, 1975. — 183 p.
4. Bellman R., Kuk K. Differential and difference equations. — М.: Reace, 1967. — 548 p.