



ответствующее возмущенной форме равновесия, при которой не все перемещения  $Z_i$  равны нулю. Это возможно при условии, если определитель системы (1) обращается в нуль

$$f = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Соотношение (2) и является уравнением для определения критических значений нагрузки.

Выражения для единичных реакций  $r_{ik}$  в зависимости от способа закрепления концов элемента рамы и вида смещения приведены в таблице 1 [2], где в расчетных формулах функции имеют вид

$$\varphi_1(v) = \frac{v^2}{3\left(1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)}; \quad \varphi_2(v) = \frac{1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v}}{8\left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2}\right)}; \quad \varphi_3(v) = \frac{\frac{v}{\sin v} - 1}{4\left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)};$$

$$\varphi_4(v) = \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right); \quad \eta_1(v) = \varphi_1(v) - \frac{v^2}{3}; \quad \eta_2(v) = \eta_1\left(\frac{v}{2}\right),$$

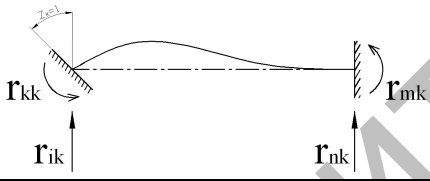
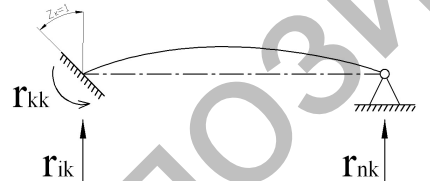
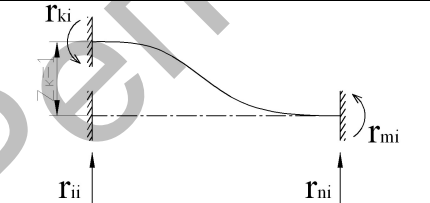
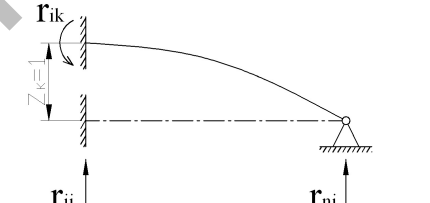
причем критический параметр определяется следующим выражением:

$$v = \ell \sqrt{\frac{N}{EJ}}, \quad (3)$$

где  $\ell$  — длина сжатого стержня;  $EJ$  — его жесткость при изгибе;  $N$  — продольная сила.

Т а б л и ц а 1

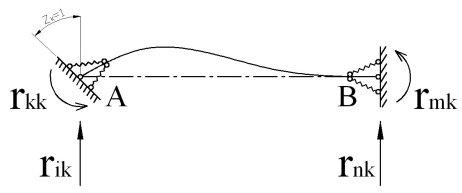
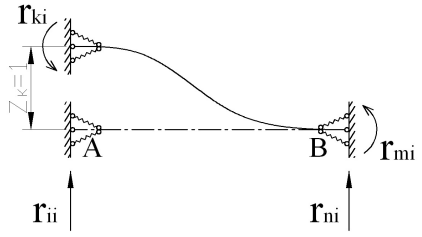
Расчетные формулы для единичных реакций

Схема	Тип единичного смещения	Расчетные формулы
	Единичный поворот	$r_{kk} = 4\varphi_2 \frac{EJ}{\ell}; r_{ik} = 6\varphi_4 \frac{EJ}{\ell};$ $r_{mk} = 2\varphi_3 \frac{EJ}{\ell}; r_{nk} = -r_{ik}$
		$r_{kk} = 3\varphi_1 \frac{EJ}{\ell}; r_{ik} = 3\varphi_1 \frac{EJ}{\ell^2};$ $r_{nk} = -r_{ik}$
	Единичное смещение	$r_{ki} = r_{mi} = 6\varphi_4 \frac{EJ}{\ell^2}; r_{ii} = 12\eta_2 \frac{EJ}{\ell^3};$ $r_{ni} = -r_{ii}$
		$r_{ik} = 3\varphi_1 \frac{EJ}{\ell^2}; r_{ii} = 3\eta_1 \frac{EJ}{\ell^3};$ $r_{ni} = -r_{ii}$

Согласно исследованиям авторов, учитывая, что жесткость узловых сопряжений элементов умножается на коэффициент упругости, то выражение для единичных реакций  $r_{ik}$  в зависимости от вида смещения имеют следующий вид (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

**Расчетные формулы для единичных реакций с учетом коэффициента упругости  
узловых сопряжений элементов**

Схема	Тип единичного смещения	Расчетные формулы
	Единичный поворот	$r_{kk} = 4\varphi_2 \frac{EJ}{\ell} K_A K_B + 3\varphi_1 \frac{EJ}{\ell} K_A (1 - K_B);$ $r_{ik} = 6\varphi_4 \frac{EJ}{\ell^2} K_A K_B + 3\varphi_1 \frac{EJ}{\ell^2} K_A (1 - K_B);$ $r_{mk} = 2\varphi_3 \frac{EJ}{\ell} K_A K_B;$ $r_{nk} = -r_{ik}$
	Единичное смещение	$r_{ki} = 6\varphi_4 \frac{EJ}{\ell^2} K_A K_B + 3\varphi_1 \frac{EJ}{\ell^2} K_A (1 - K_B);$ $r_{mi} = r_{ki};$ $r_{ii} = 12\eta_2 \frac{EJ}{\ell^3} K_A K_B +$ $3\eta_1 \frac{EJ}{\ell^3} (K_A (1 - K_B) + K_B (1 - K_A)) +;$ $\frac{v^2 EJ}{\ell^3} (1 - K_A)(1 - K_B)$ $r_{ni} = -r_{ii}$

В качестве примера рассматривается двухпролетный каркас промышленного здания с физико-геометрическими характеристиками, приведенными на рисунке 1, где  $P_1, P_3, P_5$  — собственный вес кранов;  $P_2, P_4$  — вес движущихся тележек кранов с грузами [3].

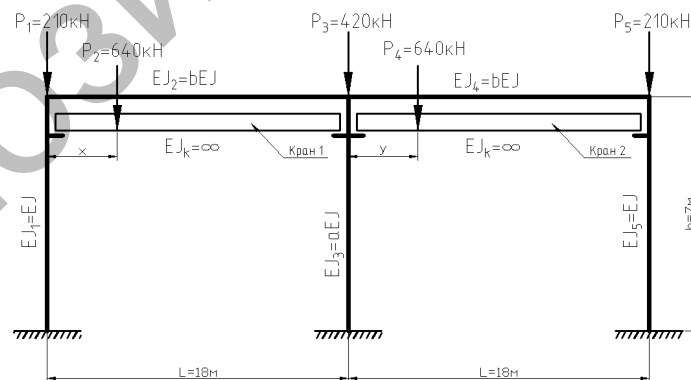


Рис. 1. Исходная схема

Определяется невыгодное положение тележек кранов с точки зрения потери устойчивости рамной конструкции. При решении этой задачи примем узлы абсолютно жесткие.

Продольные усилия, возникающие в стойках, от движения тележек определяются как

$$N_1 = P_1 + P_2 \left( \frac{18-x}{18} \right); \quad N_2 = P_3 + P_2 \left( \frac{x}{18} \right) + P_4 \left( \frac{18-y}{18} \right); \quad N_3 = P_5 + P_4 \left( \frac{y}{18} \right),$$

где  $x, y$  — координаты положения тележек с грузом.



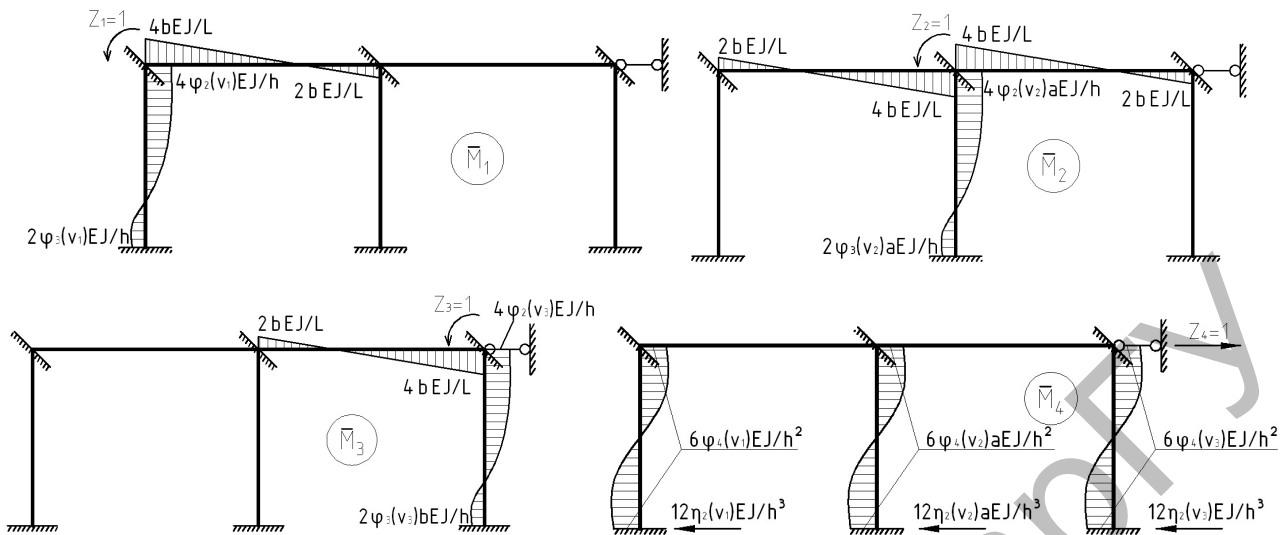


Рис. 4. Единичные эпюры

По единичным эпюрам (рис. 4) определяем единичные реакции

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= 4\varphi_2(v_1) \frac{EJ_1}{h} + 4 \frac{EJ_2}{L}; & r_{12} &= r_{21} = 2 \frac{EJ_2}{L}; & r_{13} &= r_{31} = 0; \\
 r_{14} &= r_{41} = 6\varphi_4(v_1) \frac{EJ_1}{h^2}; & r_{22} &= 4\varphi_2(v_2) \frac{EJ_3}{h} + 4 \frac{EJ_2}{L} + 4 \frac{EJ_4}{L}; \\
 r_{23} &= r_{32} = 2 \frac{EJ_4}{L}; & r_{24} &= r_{42} = 6\varphi_4(v_2) \frac{EJ_3}{h^2}; \\
 r_{33} &= 4\varphi_2(v_3) \frac{EJ_5}{h} + 4 \frac{EJ_4}{L}; & r_{34} &= r_{43} = 6\varphi_4(v_3) \frac{EJ_5}{h}; \\
 r_{44} &= 12\eta_2(v_1) \frac{EJ_1}{h^3} + 12\eta_2(v_2) \frac{EJ_3}{h^3} + 12\eta_2(v_3) \frac{EJ_5}{h^3}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Решая уравнения (2), определяем критический параметр  $v_1$ . Для данной задачи на языке программирования Delphi [4] составлена программа для нахождения критического параметра  $v_1$ , блок-схема которой приведена ниже (рис. 5).

В результате реализации программы получено невыгодное положение нагрузки  $x=18$  м и  $y=0$  м, когда жесткость  $EJ$  рамы наибольшая.

Определим невыгодное положение крановых тележек с точки зрения потери устойчивости рамной конструкции (рис. 1), приняв узлы данной рамы шарнирными. На рисунке 6 показана основная система двухпролетной рамы с шарнирными узлами. В основной системе данной рамы, рассчитывая ее методом перемещений, возникает одно линейное смещение. По таблице 1 строим единичные эпюры от смещения (рис. 7).

Уравнение для определения критического параметра  $v_1$  примет вид

$$r_1 = 3 \frac{EJ}{h^3} (\eta_1(v_1) + a\eta_1(v_2) + \eta_1(v_3)). \tag{7}$$

Используя программу из предыдущего примера (рис. 5), заменив определитель матрицы на (7), получаем, что жесткость рамы  $EJ$  наибольшая при положении крановых тележек  $x=18$  м и  $y=0$  м.

Данный результат показал, что, независимо от сопряжения узлов (жестко защемленные или шарнирные узлы), невыгодное расположение крановых тележек будет идентичным, а именно жесткость рамной конструкции будет наибольшая, когда вся нагрузка от тележек кранов приходится на среднюю стойку рамы. Поэтому можно сделать вывод, что расположение крановых тележек не изменится, если упругость узлов рамы будет варьироваться в промежутке от 0 — соответствующем шарнирным узлам до 1 — соответствующем жестко защемленным узлам.

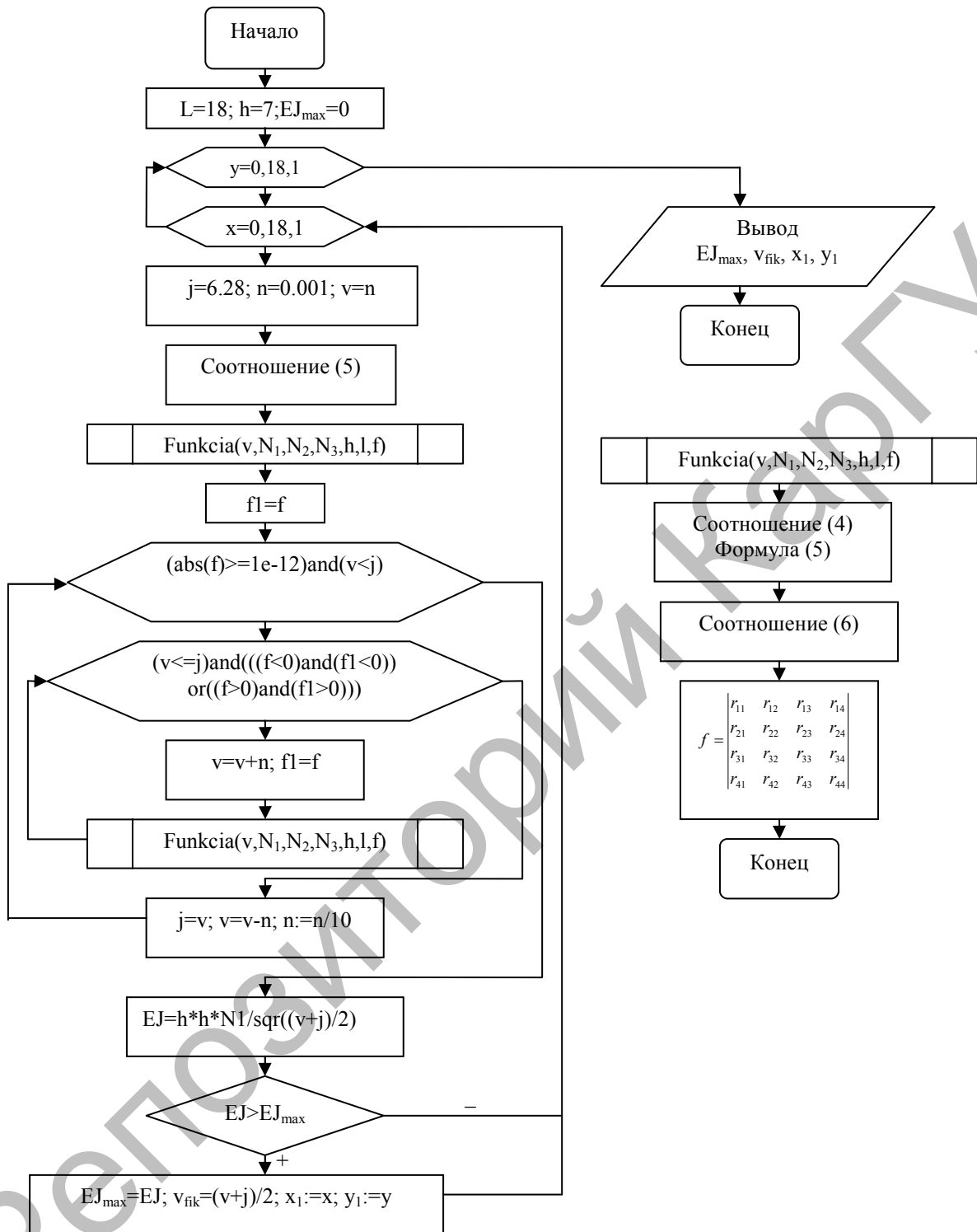


Рис. 5. Блок-схема программы

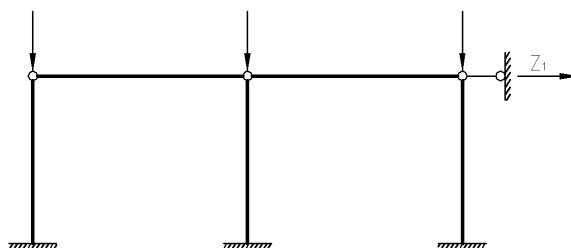


Рис. 6. Основная система

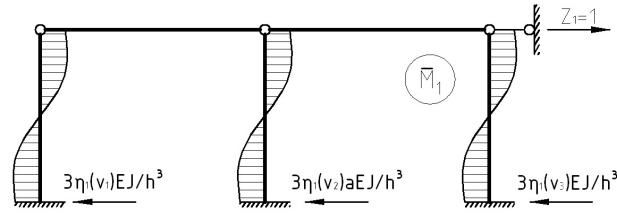


Рис. 7. Единичная эпюра

С учетом данного утверждения производим расчет двухпролетной рамы, предполагая, что коэффициенты упругости узлов элементов рамы одинаковые ( $K = K_1 = K_2 = K_3$ ) и лежат в промежутке  $0 \leq K \leq 1$ , а основания стоек рамы жестко закреплены, то есть коэффициент упругости основания рамы равен  $K_{опор} = 1$ . На рисунке 8 представлена расчетная схема двухпролетной рамы с учетом упругости верхних узлов.

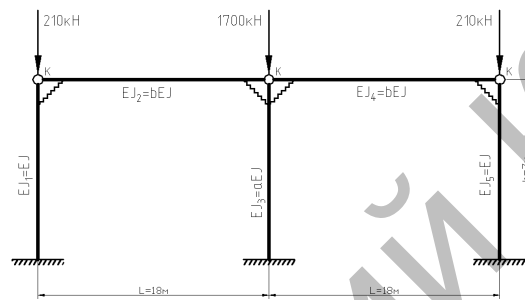


Рис. 8. Расчетная схема двухпролетной рамы с учетом упругости узлов

Так же, как и в предыдущем случае, в основной системе данной рамы возникают три неизвестных угла поворота и одно линейное смещение (рис. 9). Согласно таблице 2 строим единичные эпюры от трех углов поворота и одного смещения (рис. 10).

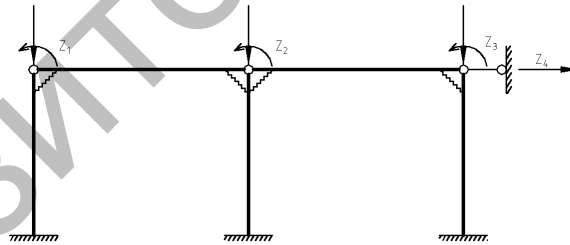


Рис. 9. Основная схема

По единичным эпюрам определяем единичные реакции

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= 4\varphi_2(v_1) \frac{EJ}{h} K + 4 \frac{bEJ}{L} K^2 + 3 \frac{bEJ}{L} K(1-K); & r_{12} = r_{21} &= 2 \frac{bEJ}{L} K^2; & r_{13} = r_{31} &= 0; \\
 r_{14} = r_{41} &= 6\varphi_4(v_1) \frac{EJ}{h^2} K; & r_{22} &= 4\varphi_2(v_2) \frac{aEJ}{h} K + 8 \frac{bEJ}{L} K^2 + 3 \frac{bEJ}{L} K(1-K); \\
 r_{23} = r_{32} &= 2 \frac{bEJ}{L} K^2; & r_{24} = r_{42} &= 6\varphi_4(v_2) \frac{aEJ}{h^2} K; \\
 r_{33} &= 4\varphi_2(v_3) \frac{EJ}{h} K + 4 \frac{bEJ}{L} K^2 + 3 \frac{bEJ}{L} K(1-K); & r_{34} = r_{43} &= 6\varphi_4(v_3) \frac{EJ}{h} K; \\
 r_{44} &= 12 \frac{EJ}{h^3} (\eta_2(v_1) + a\eta_2(v_2) + \eta_2(v_3)) K + 3 \frac{EJ}{h^3} (\eta_1(v_1) + a\eta_1(v_2) + \eta_1(v_3)) K(1-K).
 \end{aligned} \tag{8}$$

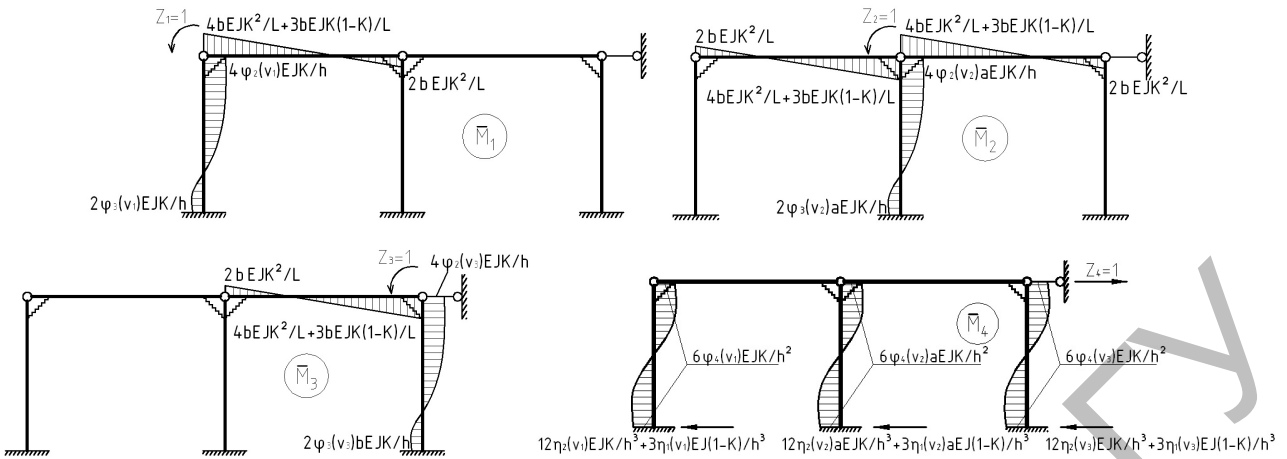


Рис. 10. Единичные эпюры

Решая уравнения устойчивости (2), определяем критическое значение  $\nu$  с учетом переменного коэффициента упругости узлов  $K$ . Для данной задачи составлена программа для нахождения критического параметра  $\nu$ , блок-схема которой приведена ниже (рис. 11).

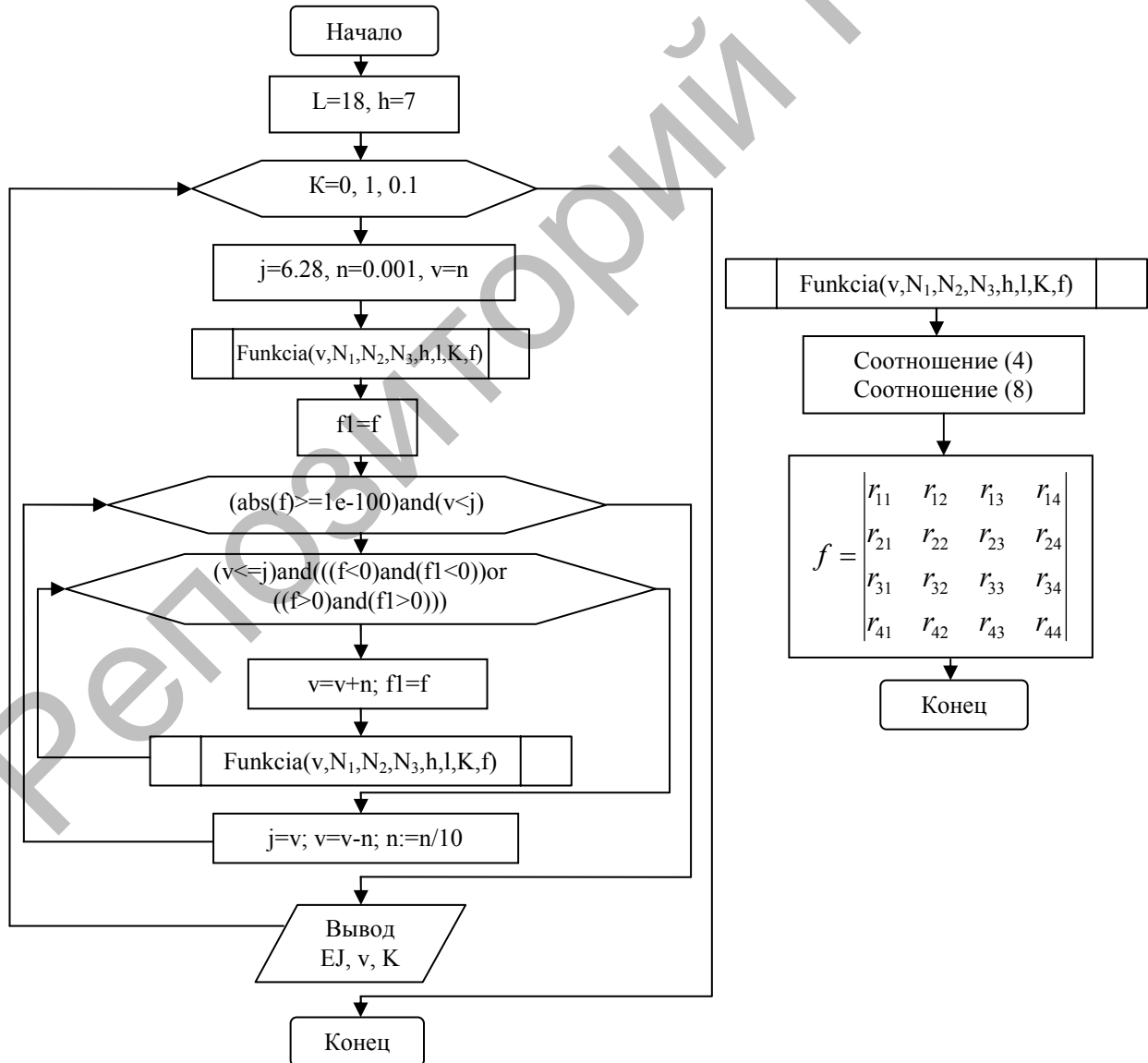


Рис. 11. Блок-схема программы с учетом упругости узлов

Результаты исследований приведены на рисунке 12, где показан график изменения критического параметра от коэффициентов упругости узлов.

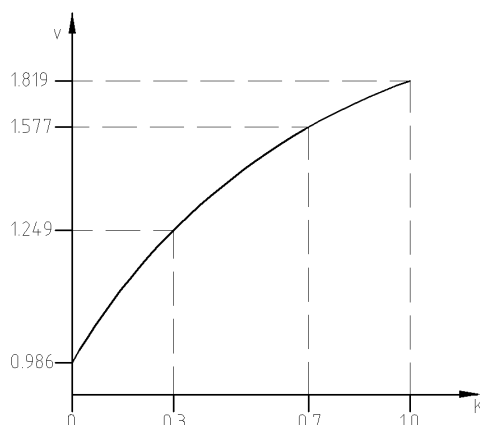


Рис. 12. График изменения критического значения

Из приведенных исследований можно сделать вывод: при расчете рамы с учетом упругости узлов критический параметр уменьшается, что влечет за собой увеличение жесткости сечений рамы. Если учесть тот факт, что в реальных условиях узлы не абсолютно жесткие или шарнирные, тогда для исследуемой рамы при жестких узлах требуемый параметр при изгибе составляет  $EJ = 311,031 \text{ кНм}^2$ , а при упругоподатливых узлах, с коэффициентом  $K = 0,9$  требуемая жесткость будет на 8,84 % больше. Данные результаты показывают, что более уточненные значения критических параметров целесообразно определять с учетом коэффициентов упругоподатливости узлов.

#### Список литературы

1. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. — М.: Высш. шк., 1986.— 607 с.
2. Клейн Г.К., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. Руководство к практическим занятиям по курсу «Строительная механика». — М.: Высш. шк., 1972. — 320 с.
3. Справочник по кранам: В 2 т. — Т. 2. Характеристики и конструктивные схемы кранов. Крановые механизмы, их детали и узлы. Техническая эксплуатация кранов / М.П.Александров, М.М.Гохберг. — М.: Машиностроение, 1988. — 559 с.
4. Фаронов В.В. Delphi. Программирование на языке высокого уровня. — СПб.: Питер, 2005. — 640 с.