References

1 Zhanbusinova B.H. *On the dependence of periodic solutions to the parameter* // Bull. of KarSU. Ser. Mathematics, 2009, № 3 (55), p. 8–12.

2 Zhanbusinova B.H. *About periodic solutions of the class of the second order differential-difference equations* // Bull. of KarSU. Ser. Mathematics, 2010, №2 (58), p. 30–34.

3 Zhanbusinova B.H. *About periodic solutions of the first order differential equations with deviation of argument* // Bull. of KarSU. Ser. Mathematics, 2010, №2 (58), p. 34–38.

4 Malkin I.G. *Some problems in the theory of nonlinear oscillations*, M.: Gostekhizdat, 1956, p. 367.

5 Ryabov Yu.A. Tolmachev I.L. *Coll. of scientific Crabot aspirantovollected Works graduate issue 1. MA, University of Friendship of Peoples*, 1968, p. 21–23.

УДК 517.51

А.М.Жантакбаева

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (E-mail: ayagoz.zhantakbayeva@yandex.ru)

Неравенство Пэли для преобразования типа Харди коэффициентов кратных рядов Фурье

В статье рассмотрено неравенство типа Пэли (Харди-Литтлвуда-Стейна) для обобщенных средних типа Харди коэффициентов кратных тригонометрических рядов Фурье функций из анизотропного пространства Лоренца. С другой стороны, такого типа неравенства определяют необходимые условия принадлежности многопеременной функции к пространству $L_{\bar p\bar q}[0;1]^n$, что доказана нижняя оценка нормы функции в этом пространстве. Введено пространство $n_{\bar p,\bar q}(\lambda)$, исследованы интерполяционные и свойства вложения, которые позволяют получить основной результат данной работы.

Ключевые слова: неравенства Харди-Литтлвуда, неравенство Стейна, неравенства Пэли, кратные тригонометрические ряды Фурье, коэффициенты Фурье, анизотропные пространства Лоренца.

1 Введение. Пусть $1 \le \bar p < \infty,\ 0 < \bar q \le \infty,$ где $\bar p = (p_1,..,p_n),\ \bar q = (q_1,..,q_n).$ Множество всех измеримых по Лебегу 1-периодичных функций, определенных на $[0,1]^n,$ называется пространством Лоренца $L_{\bar p,\bar q}[0,1)^n,$ если конечны величины:

при $0 < \bar q < \infty$

$$\|f\|_{L_{\bar p\bar q}[0;1]^n} = \left(\int_0^1 \dots \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1}} \dots t_n^{\frac{1}{p_n}} f^{*_1\dots *_n}(t_1,\dots,t_n)\right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \frac{dt_n}{t_n}\right)^{\frac{1}{q_n}} < \infty;$$

при $\bar q = \bar\infty$

$$\|f\|_{L_{\bar p\bar\infty}[0;1]^n} = \sup_{\bar t=(t_1,\dots,t_n)\in[0;1]^n} t_1^{\frac{1}{p_1}} \dots t_n^{\frac{1}{p_n}} f^{*_1\dots *_n}(t_1,\dots,t_n) < \infty.$$

Здесь $f^{*_1\dots *_n}(t_1,\dots,t_n)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(\bar t)|$ по любой переменной t_j при фиксированных остальных переменных [1].

Пусть функции f соответствует ряд Фурье $\sum_{k_n=1}^{\infty} \dots \sum_{k_1=1}^{\infty} a_{k_1\dots k_n} e^{2\pi i(k_1x_1+\dots+k_nx_n)}$ по тригонометрической системе, где коэффициенты

$$a_{k_1\dots k_n}(f) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1,\dots,x_n) e^{-2\pi i(k_1x_1+\dots+k_nx_n)} dx_1..dx_n.$$

В работе изучается следующая задача: пусть для функции $f(\overline{x}) \in L_1[0;1]^n$ соответствует ряд Фурье $\sum_{\overline{k}\in N^n}^{\infty} a_{\overline{k}}(f)e^{2\pi i\overline{k}\overline{x}}$ по тригонометрической системе, если $f \in L_{\overline{p},\overline{q}}$, то какими свойствами обладают ее коэффициенты Фурье $a_{\overline{k}}(f)$.

В одномерном случае хорошо известны неравенства Харди-Литтлвуда, Пэли [2], Стейна [3] и т.д. В многомерном случае Е.Д.Нурсултановым [4] рассмотрены и получены неравенства Харди-Литтлвуда для коэффициентов Фурье функции из анизотропного пространства Лоренца. В данной работе рассматривается аналогичное неравенство типа Пэли для обобщенного среднего Харди коэффициентов кратного ряда Фурье функции из анизотропного пространства Лоренца $L_{\overline{p},\overline{q}}[0,1)^n$. Результаты данной статьи в одномерном случае были опубликованы в работе [5] как краткое сообщение, полная версия — в работе [6], включая аналогичное неравенство для усреднения типа Беллмана.

Условимся обозначить через C постоянные, которые зависят только от параметров $\overline{p},\overline{q}$.

2 Анизотропное пространство $n_{\overline{p},\overline{q}}(\lambda)$. Пусть $1 \le \overline{p} < \infty,\ 0 < \overline{q} \le \infty$, где $\overline{p} = (p_1,..,p_n)$, $\overline{q} = (q_1,..,q_n)$. Для последовательности $\lambda = \{\lambda_{k_1...k_n}\}_{k_1,...,k_n=1}^{\infty}$, такая что для любого $k_1,...,k_n \in N : \sum_{m_n=1}^{k_n}...\sum_{m_1=1}^{k_1}\lambda_{m_1...m_n} \ne 0$, определим анизотропное дискретное пространство $n_{\overline{pq}}(\lambda)$, множество всех последовательностей $a = \{a_{k_1...k_n}\}_{k_1,...,k_n=1}^{\infty}$, для которых конечна величина

$$\|a\|_{n\overline{pq}(\lambda)} = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty}...\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}\left(k_1^{\frac{1}{p_1}}...k_n^{\frac{1}{p_n}}\overline{a}_{k_1...k_n}(\lambda)\right)^{q_1}\frac{1}{k_1}\right)^{\frac{q_z}{q_1}}...\frac{1}{k_n}\right)^{\frac{1}{q_n}}.$$

При $\overline{q} = (\infty,...,\infty)$

$$\|a\|_{n\overline{p\infty}(\lambda)} = \sup_{k_i\in N, i=1,...,n} k_1^{\frac{1}{p_1}}...k_n^{\frac{1}{p_n}}\overline{a}_{k_1...k_n}(\lambda) < \infty,$$

где

$$\overline{a}_{k_1...k_n}(\lambda) = \sup_{m_i\ge k_i}, i=1,...,n\frac{1}{\left|\sum_{s_n=1}^{m_n}...\sum_{s_1=1}^{m_1}\lambda_{s_1...s_n}\right|}\left|\sum_{s_n=1}^{m_n}...\sum_{s_1=1}^{m_1}\lambda_{s_1...s_n}a_{s_1...s_n}\right|, k_1,...,k_n \in N.$$

Лемма 1. Если $1 \le \overline{p} < \infty,\ 0 < \overline{q} \le \infty$, то

$$n_{\overline{pq}}(\lambda) \to n_{\overline{p\infty}}(\lambda).$$

Доказательство. Рассмотрим $k_1^{\frac{1}{p_1}}...k_n^{\frac{1}{p_n}}$. Используя для любого $i = 1,...,n$ асимптотическое равенство

$$k_i^{\frac{1}{p_i}} \sim \left(\sum_{m_i=1}^{k_i} m_i^{\frac{q_i}{p_i}-1}\right)^{q_i},$$

получим

$$\prod_{i=1}^{n} k_i^{\frac{1}{p_i}} \sim \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m_i=1}^{k_i} m_1^{\frac{q_i}{p_i}-1}\right)^{q_i} = \left(\sum_{m_n=1}^{k_n}...\left(\sum_{m_1=1}^{k_1}\left(m_1^{\frac{1}{p_1}}...m_n^{\frac{1}{p_n}}\right)^{q_1}\frac{1}{m_1}\right)^{\frac{q_z}{q_1}}...\frac{1}{m_n}\right)^{\frac{1}{q_n}}.$$

Поскольку при $m_i \le k_i$ имеем $\overline{a}_{k_1...k_n}(\lambda) \le \overline{a}_{m_1...m_n}(\lambda)$, то

$$\|a\|_{n\overline{p\infty}(\lambda)} = \sup_{k_i\in N, i=1,...,n} k_1^{\frac{1}{p_1}}...k_n^{\frac{1}{p_n}}\overline{a}_{k_1...k_n}(\lambda) \le$$

$$\leq C\ \sup_{k_i \in N} \left(\sum_{m_n=1}^{k_n} \ldots \left(\sum_{m_1=1}^{k_1} \left(m_1^{\frac{1}{p_1}} \ldots m_n^{\frac{1}{p_n}} \overline{a}_{m_1 \ldots m_n}(\lambda) \right)^{q_1} \frac{1}{m_1} \right)^{\frac{q_z}{q_1}} \ldots \frac{1}{m_n} \right)^{\frac{1}{q_n}} \leq C \|a\|_{n\overline{p}\overline{q}^{(\lambda)}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $1 \leq \overline{p} < \infty,\ 0 < \overline{q} \leq \infty,$ тогда

$$\|a\|_{n\overline{p}\overline{q}(\lambda)} \sim \left(\sum_{m_n=0}^{\infty} \ldots \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \left(2^{\frac{k_1}{p_1}} \ldots 2^{\frac{k_n}{p_n}} \overline{a}_{2k_1 \ldots 2^{k_n}}(\lambda) \right)^{q_1} \right)^{\frac{q_z}{q_1}} \ldots \right)^{\frac{1}{q_n}}.$$

Доказательство. Так как для любого $i = 1, \ldots, n$ имеем

$$C2^{\frac{q_i(k_i+1)}{p_i}} \leq \sum\nolimits_{m_i=2^{k_i}}^{2^{k_i+1}-1} m_i^{\frac{q_i}{p_i}-1} \leq C2^{q_i \frac{k_i}{p_i}}, \tag{1}$$

и поскольку при $k_i \leq m_i$ выполняется неравенство

$$\overline{a}_{m_1 \ldots m_n}(\lambda) \leq \overline{a}_{k_1 \ldots k_n}(\lambda), \tag{2}$$

мы получим, что

$$C2^{\frac{q_1(k_1+1)}{p_1}} \overline{a}^{q_1}_{2^{k_1+1} m_z \ldots m_n}(\lambda) \leq \sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} m_1^{\frac{q_1}{p_1}-1} \overline{a}^{q_1}_{m_1 \ldots m_n}(\lambda) \leq C2^{q_1 \frac{k_1}{p_1}} \overline{a}^{q_1}_{2^{k_1} m_z \ldots m_n}(\lambda).$$

Просуммировав неравенства по k_1 от нуля до бесконечности и возведя в степень $\frac{1}{q_1}$, получим

$$C\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} 2_1^{\frac{q_1(k_1+1)}{p_1}} \overline{a}^{q_1}_{2^{k_1} m_z \ldots m_n}(\lambda) \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} m_1^{\frac{q_1}{p_1}-1} \overline{a}^{q_1}_{m_1 \ldots m_n}(\lambda) \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq$$

$$\leq C\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} 2^{\frac{q_1 k_1}{p_1}} \overline{a}^{q_1}_{2^{k_1} m_z \ldots m_n}(\lambda) \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Отсюда, вновь использовав (1) и (2), получим

$$C2^{\frac{q_z(k_z+1)}{p_z}} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} 2^{\frac{q_1(k_1+1)}{p_1}} \overline{a}^{q_1}_{2^{k_1+1} 2^{k_1+1} m_s \ldots m_n}(\lambda) \right)^{\frac{q_z}{q_1}} \leq \sum_{m_z=2^{k_z}}^{2^{k_z+1-1}} m_2^{\frac{q_z}{p_z}-1} \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} m_1^{\frac{q_1}{p_1}-1} \overline{a}^{q_1}_{m_1 \ldots m_n}(\lambda) \right)^{\frac{q_z}{q_1}} \leq$$

$$\leq C2^{\frac{q_{zk_z}}{p_z}} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} 2^{\frac{q_1 k_1}{p_1}} \overline{a}^{q_1}_{2^{k_1} 2^{k_z+m_s \ldots m_n}}(\lambda) \right)^{\frac{q_z}{q_1}}.$$

Суммируя неравенства по k_2 от нуля до бесконечности и возведя в степень $\frac{1}{q_z}$, получим

$$C\left(\sum_{k_z=0}^{\infty} 2^{\frac{q_z(k_z+1)}{p_z}} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} 2^{\frac{q_1(k_1+1)}{p_1}} \overline{a}^{q_1}_{2^{k_1+1} 2^{k_1+1} m_s \ldots m_n}(\lambda) \right)^{\frac{q_z}{q_1}} \right)^{\frac{1}{q_z}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{m_z=1}^{\infty} m_2^{\frac{q_z}{p_z}-1} \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} m_1^{\frac{q_1}{p_1}-1} \overline{a}^{q_1}_{m_1 \ldots m_n}(\lambda) \right)^{\frac{q_z}{q_1}} \right)^{\frac{1}{q_z}} \leq$$

$$\leq C\left(\sum_{k_z=0}^{\infty} 2^{\frac{q_z k_z}{p_z}} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} 2^{\frac{q_1 k_1}{p_1}} \overline{a}^{q_1}_{2^{k_1}2^{k_z} m_s \ldots m_n}(\lambda)\right)^{\frac{q_z}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_z}}.$$

Таким образом, продолжая процесс n раз, получим требуемое неравенство. Лемма доказана.

В работе [1] был введен интерполяционный метод для анизотропных пространств.

Пусть $A_0 = (A_1^0,...,A_n^0)$, $A_1 = (A_1^1,...,A_n^1)$ — два анизотропных пространства, $E = \{\backslash\varepsilon = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0$ или $\varepsilon_i = 1,\ i = 1,...,n\}$. Для произвольного $\varepsilon \in E$ определим пространство $A_\varepsilon = (A_1^{\varepsilon_1},...,A_n^{\varepsilon_n})$ с нормой

$$\|a\|_{A_\varepsilon} = \left\| \ldots \|a\|_{A_1^{\varepsilon_1}} \ldots \right\|_{A_n^{\varepsilon_n}}.$$

Пару анизотропных A_0 и A_1 пространств назовем совместимой, если найдется линейное хаусдорфово пространство, содержащее в качестве подмножеств пространство $A_\varepsilon, \varepsilon \in E$.

$K(\overline{t}, a; A_0, A_1) = \inf\left\{\sum_{s\in E} \overline{t}^{\,s} \|a_s\|_{A_\varepsilon} : a = \sum_{s\in E} a_s,\ a_s \in A_s\right\}$ — функционал Петре, где $\overline{t}^{\,\varepsilon} = t_1^{\varepsilon_1} \ldots t_n^{\varepsilon_n}$. При $0 < \overline{q} = (q_1,...,q_n) < \infty, 0 < \overline{\theta} = (\theta_1,...\theta_n) < 1$, обозначим через $A_{\overline{\theta},\overline{q}} = (A_0, A_1)_{\overline{\theta},\overline{q}}$ — линейное подмножество $\sum_{\varepsilon\in E} A_\varepsilon$, состоящее из элементов, для которых верно

$$\|a\|_{A_{\overline{\theta},\overline{q}}} = \left(\int_0^\infty \ldots \left(\int_0^\infty \left(t_{t_1}^{-\theta_1} \ldots t_n^{-\theta_n} K\left(\overline{t}, a; A_0, A_1\right)\right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_z}{q_1}} \ldots \frac{dt_n}{t_n}\right)^{\frac{1}{q_n}} < \infty,$$

а при $q = \infty$

$$\|a\|_{A_{\overline{\theta}\overline{\infty}}} = \sup_{0<E<\infty} t_1^{-\theta_1} \ldots t_n^{-\theta_n} K(\overline{t}, a; A_0, A_1) < \infty.$$

Теорема 1. Если $1 < \overline{p}^0 < \overline{p}^1 < \infty$ и параметры $0 < \overline{q} \leq \infty, 0 < \overline{q}^i \leq \infty$, где $i = 0,1, 0 < \overline{\theta} < 1$, то

$$\left(n_{\overline{p}^0,\overline{q}^0}(\lambda), n_{\overline{p}^1\overline{q}^1}(\lambda)\right)_{\overline{\theta},\overline{q}} \to n_{\overline{p},\overline{q}}(\lambda),$$

где $\dfrac{1}{\overline{p}} = \dfrac{1-\overline{\theta}}{\overline{p}^0} + \dfrac{\overline{\theta}}{\overline{p}^1}$.

Доказательство. В силу вложения из леммы 1

$$n_{\overline{p}^i,\overline{q}^i}(\lambda) \to n_{\overline{p}^i,\overline{\infty}}(\lambda), i = 0,1$$

достаточно доказать, что

$$\left(n_{\overline{p}^0,\infty}(\lambda), n_{\overline{p}^1,\infty}(\lambda)\right)_{\overline{\theta},\overline{q}} \to n_{\overline{p},\overline{q}}(\lambda).$$

Пусть $\overline{\nu} = (\nu_1,...,\nu_n)$, где $\nu_i = t_i^{\gamma i}, \gamma_i = \dfrac{p_i^0 p_i^1}{p_i^1 - p_0^i}, 0 < t_i < \infty$. $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0$ или $\varepsilon_i = 1,\ i = 1,...,n\}$.

Для последовательности $a = \{a_{k_1 \ldots k_n}\}_{k_i \in N, i=1,...,n}$ рассмотрим представление

$$a_{k_1 \ldots k_n} = \sum_{s\in E} a^\varepsilon_{k_1 \ldots k_n}, a^\varepsilon_{k_1 \ldots k_n} \in n_{\overline{p}^\varepsilon \overline{\infty}}.$$

Учитывая свойство при $i = 1,..,n$

$$a_{k_1 \ldots k_n} = \left(\overline{\sum_{s\in E} a^\varepsilon_{k_1 \ldots k_n}}\right)(\lambda) = \sup_{m_i \geq k_i} \frac{1}{\left|\sum_{s_n=1}^{m_n} \ldots \sum_{s_1=1}^{m_1} \lambda_{s_1 \ldots s_n}\right|} \left|\sum_{s_n=1}^{m_n} \ldots \sum_{s_1=1}^{m_1} \lambda_{s_1 \ldots s_n} \sum_{s\in E} a^\varepsilon_{s_1 \ldots s_n}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{s\in E} \sup_{m_i \geq k_i} \frac{1}{\left|\sum_{s_n=1}^{m_n} \ldots \sum_{s_1=1}^{m_1} \lambda_{s_1 \ldots s_n}\right|} \left|\sum_{s_n=1}^{m_n} \ldots \sum_{s_1=1}^{m_1} \lambda_{s_1 \ldots s_n} a^\varepsilon_{s_1 \ldots s_n}\right| = \sum_{s\in E} \overline{a}^\varepsilon_{k_1 \ldots k_n},$$

получим

$$\sup_{\overline{\nu} \geq \overline{s} \geq 1} \overline{s}^{\frac{1}{\overline{p}^0}} \overline{a}_{\overline{s}}(\lambda) \leq \sum_{s\in E} \sup_{\overline{\nu} \geq \overline{s} \geq 1} \overline{s}^{\frac{1}{\overline{p}^0}} \overline{a}^\varepsilon_{\overline{s}}(\lambda) = \sum_{s\in E} \sup_{\overline{\nu} \geq \overline{s} \geq 1} \overline{s}^{\frac{1}{\overline{p}^0} - \frac{1}{\overline{p}^\varepsilon} + \frac{1}{\overline{p}^\varepsilon}} \overline{a}^\varepsilon_{\overline{s}}(\lambda).$$

Так как для любых $i=1,..,n,$ имеем

$$\frac{1}{p_i^0}-\frac{1}{p_i^{\varepsilon_i}}=\begin{cases}0, \text{ если } \varepsilon_i=0;\\ \dfrac{1}{\gamma_i}, \text{ если } \varepsilon_i=1\end{cases}$$

и

$$\sup_{\nu_i\geq s_i\geq 1} s_i^{\frac{1}{p_i^0}-\frac{1}{p_i^{\varepsilon_i}}}=\nu_i^{\frac{1}{p_i^0}-\frac{1}{p_i^{\varepsilon_i}}}=t_i^{s_i}.$$

Тогда получим

$$\sup_{\bar\nu\geq\bar s\geq 1}\bar s^{\frac{1}{\bar p^0}}\bar a_{\bar s}(\lambda)\leq\sum_{s\in E}\bar t^{\,s}\sup_{\bar s\in N}\bar s^{\frac{1}{\bar p^{\varepsilon}}}\bar a_{\bar s}^{\varepsilon}(\lambda).$$

Учитывая произвольность представления $a_{k_1\ldots k_n}=\sum_{\varepsilon\in E}a^{\varepsilon}_{k_1\ldots k_n}$, имеем

$$\sup_{\bar\nu\geq\bar s\geq 1}\bar s^{\frac{1}{\bar p^0}}\bar a_{\bar s}(\lambda)\leq K\left(\bar t, a;\, n_{\bar p^{0\infty}}(\lambda), n_{\bar p^{1\infty}}(\lambda)\right).$$

Поэтому при $0<\bar q\leq\infty$ будем иметь

$$\|a\|_{\left(n_{\bar p^0,\infty}(\lambda),n_{\bar p^1,\infty}(\lambda)\right)_{\bar\theta,\bar q}}=\left(\int_0^\infty\left(\bar t^{-\bar\theta}K\left(\bar t,a;\,n_{\bar p^{0\infty}}(\lambda),n_{\bar p^{1\infty}}(\lambda)\right)\right)^{\bar q}\frac{d\bar t}{\bar t}\right)^{\frac{1}{\bar q}}\geq$$

$$\geq\left(\int_0^\infty\left(\bar t^{-\bar\theta}\sup_{\bar\nu\geq\bar s\geq 1}\bar s^{\frac{1}{\bar p^0}}\bar a_{\bar s}(\lambda)\right)^{\bar q}\frac{d\bar t}{\bar t}\right)^{\frac{1}{\bar q}}.$$

Сделаем замену $\bar t=\bar u^{\frac{\bar p^1-\bar p^0}{\bar p^0\bar p^1}}$ и используем лемму 2. Так как $1<\bar p^0<\bar p^1$, то

$$\left(\int_0^\infty\left(\bar t^{-\bar\theta}\sup_{\bar\nu\geq\bar s\geq 1}\bar s^{\frac{1}{\bar p^0}}\bar a_{\bar s}(\lambda)\right)^{\bar q}\frac{d\bar t}{\bar t}\right)^{\frac{1}{\bar q}}=\left(\int_0^\infty\left(\bar u^{-\bar\theta\left(\frac{1}{\bar p^0}-\frac{1}{\bar p^1}\right)}\sup_{\bar u\geq\bar s\geq 1}\bar s^{\frac{1}{\bar p^0}}\bar a_{\bar s}(\lambda)\right)^{\bar q}\frac{d\bar u}{\bar u}\right)^{\frac{1}{\bar q}}=$$

$$=\left(\sum_{\bar r=1}^{\infty}\int_{2^{\bar r-1}-1}^{2^{\bar r-1}}\left(\bar u^{-\bar\theta\left(\frac{1}{\bar p^0}-\frac{1}{\bar p^1}\right)}\sup_{\bar u\geq\bar s\geq 1}\bar s^{\frac{1}{\bar p^0}}\bar a_{\bar s}(\lambda)\right)^{\bar q}\frac{d\bar u}{\bar u}\right)^{\frac{1}{\bar q}}\geq C\left(\sum_{\bar r=1}^{\infty}\left(2^{-\bar\theta\bar r\left(\frac{1}{\bar p^0}-\frac{1}{\bar p^1}\right)}\sup_{2^{\bar r}\geq\bar s\geq 1}\bar s^{\frac{1}{\bar p^0}}\bar a_{\bar s}(\lambda)\right)^{\bar q}\right)^{\frac{1}{\bar q}}\geq$$

$$\geq C\left(\sum_{\bar r=1}^{\infty}\left(2^{-\bar\theta\bar r\left(\frac{1}{\bar p^0}-\frac{1}{\bar p^1}\right)}2^{\frac{\bar r}{\bar p^0}}\bar a_{2^{\bar r}}(\lambda)\right)^{\bar q}\right)^{\frac{1}{\bar q}}=\|a\|_{n_{\bar p\bar q}(\lambda).}$$

Итак, получили

$$\|a\|_{n_{\bar p,\bar q}(\lambda)}\leq C\|a\|_{\left(n_{\bar p^0,\infty}(\lambda),n_{\bar p^1,\infty}(\lambda)\right)\bar\theta,\bar q}.$$

Теорема доказана.

3. Неравенство Пэли для преобразования типа Харди. В [4] доказано утверждение, в частности, верна

Лемма 3. Пусть $1<p<\infty$ — сопряженный параметр $p'=\dfrac{p}{p-1}$, $f\in L_1[0;1]$, и функции f соответствует ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{2\pi ikx}$, $x\in[0;1]$. Тогда

$$\|f\|_{L_{p'\infty}}\leq c\sup_{m\in N}m^{1/p}\left|m\,\Delta a_m\right|.$$

В работе неравенства понимаются так, если правая сторона имеет смысл, то и левая сторона имеет смысл.

Пусть $1 \le \bar{p} < \infty$, $0 < \bar{q} \le \infty$. Для последовательности $\lambda = \left\{\lambda_{k_1 k_2 \dots k_n}\right\}_{k_1, k_2, \dots, k_n = 1}^{\infty}$ такая, что для любого $k_1, \dots, k_n \in N$: $\sum_{m_n=1}^{k_n} \dots \sum_{m_1=1}^{k_1} \lambda_{m_1 \dots m_n} \ne 0$, определим анизотропное дискретное пространство

$$n_{\bar{p},\bar{q}}(\lambda) = \left\{ a = \left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty} : \|a\|_{n_{\bar{p},\bar{q}}(\lambda)} = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \left(k_1^{1/p_1} \dots k_n^{1/p_n} \bar{a}_{k_1 \dots k_n}(\lambda) \right)^{q_1} \frac{1}{k_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \frac{1}{k_n} \right)^{\frac{1}{q_n}} < \infty \right\}.$$

При $0 < \bar{q} < \infty$, $\|a\|_{n_{\bar{p},\infty}(\lambda)} = \sup_{k_j \in N,\, j=1,\dots,n} k_1^{1/p_1} \dots k_n^{1/p_n} \bar{a}_{k_1 \dots k_n}(\lambda)$, при $\bar{q} = (\infty, \dots, \infty)$, где

$$\bar{a}_{k_1 \dots k_n}(\lambda) = \sup_{s_j \ge k_j,\, j=1,\dots,n} \frac{1}{\left| \sum_{m_n=1}^{s_n} \dots \sum_{m_1=1}^{s_1} \lambda_{m_1 \dots m_n} \right|} \left| \sum_{m_n=1}^{s_n} \dots \sum_{m_1=1}^{s_1} \lambda_{m_1 \dots m_n} a_{m_1 \dots m_n} \right|, \quad k_1, \dots, k_n \in N.$$

Теорема 2. Пусть $1 < \bar{p} < \infty$, $0 < \bar{q} \le \infty$ и $\bar{p}' = \frac{\bar{p}}{\bar{p} - 1}$. Пусть последовательность $\lambda = \left\{\lambda_{k_1 k_2 \dots k_n}\right\}_{k_1, k_2, \dots, k_n = 1}^{\infty} = \left\{\lambda_{k_1}{}^1 \lambda_{k_2}{}^2 \dots \lambda_{k_n}{}^n\right\}_{k_1, k_2, \dots, k_n = 1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\prod_{j=1}^{n} \sup_{1 \le m_j \le k_j} m_j^{2-\alpha_j} \left| \lambda_{m_j}{}^j - \lambda_{m_j+1}{}^j \right| \le \prod_{j=1}^{n} \frac{D_j}{k_j^{\alpha_j}} \left| \sum_{m_j=1}^{k_j} \lambda_{m_j}{}^j \right|,$$

число $\bar{\alpha} > \frac{1}{\bar{p}'}$, где $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. D_j — некоторая константа, не зависящая от индекса k_j. Если $f(x_1, \dots, x_n) \in L_{\bar{p}\bar{q}}[0;1]^n$. Тогда справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k_n=1}^{\infty} k_n^{\frac{q_n}{p'_n}} \dots \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{\frac{q_2}{p'_2}} \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \left(k_1^{\frac{1}{p'_1}} \bar{a}_{k_1 \dots k_n}(\lambda) \right)^{q_1} \frac{1}{k_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{1}{k_2} \right)^{\frac{q_3}{q_2}} \dots \frac{1}{k_n} \right)^{\frac{1}{q_n}} \le C \|f\|_{L_{\bar{p}\bar{q}}[0;1]^n},$$

где $\bar{a}_{k_1 \dots k_n}(\lambda) = \frac{1}{\left| \sum_{m_n=1}^{k_n} \dots \sum_{m_1=1}^{k_1} \lambda_{m_1 \dots m_n} \right|} \left| \sum_{m_n=1}^{k_n} \dots \sum_{m_1=1}^{k_1} \lambda_{m_1 \dots m_n} a_{m_1 \dots m_n} \right|, \quad k_1, \dots, k_n \in N.$

При $\bar{q} = (\infty, \dots, \infty)$

$$\sup_{k_1, \dots, k_n \in N} k_1^{\frac{1}{p'_1}} \dots k_n^{\frac{1}{p'_n}} \bar{a}_{k_1 \dots k_n}(\lambda) \le C \|f\|_{L_{\bar{p}\infty}[0;1]^n}.$$

Доказательство. Оценим величину

$$A = \sup_{k_1, \dots, k_n \in N} \frac{k_1^{1/p'_1} \dots k_n^{1/p'_n}}{\left| \sum_{m_n=1}^{k_n} \dots \sum_{m_1=1}^{k_1} \lambda_{m_1 \dots m_n} \right|} \left| \sum_{m_n=1}^{k_n} \dots \sum_{m_1=1}^{k_1} \lambda_{m_1 \dots m_n} a_{m_1 \dots m_n} \right| =$$

$$= \sup_{k_1, \dots, k_n \in N} \prod_{j=1}^{n} \frac{k_j^{1/p'_j}}{\left| \sum_{m_j=1}^{k_i} \lambda_{m_j}^{j} \right|} \left| \sum_{m_n=1}^{k_n} \dots \sum_{m_1=1}^{k_1} \lambda_{m_1}{}^1 \dots \lambda_{m_n}{}^n \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n) e^{-2\pi i (m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)} dx_1 .. dx_n \right| \le$$

$$\le \sup_{k_1,\dots,k_n\in N} \int_0^1 \dots \int_0^1 \left|f(x_1,\dots,x_n)\right| \left| \prod_{j=1}^{n} \frac{k_j^{1/p'_j}}{\left|\sum\limits_{m_j=1}^{k_j} \lambda_{m_j}^{\;j}\right|} \sum_{m_j=1}^{k_i} \lambda_{m_j}^{j} e^{-2\pi i m_j x_j} \right| dx_1 \dots dx_n .$$

Положим $\Phi_{k_1\dots k_n}(x_1,\dots,x_n)=\prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{k_j^{1/p'_j}}{\left|\sum\limits_{m_j=1}^{k_j} \lambda_{m_j}^{j}\right|} \sum\limits_{m_j=1}^{k_i} \lambda_{m_j}^{j} e^{-2\pi i m_j x_j}$.

Используя неравенство Гельдера при $\dfrac{1}{p_i}+\dfrac{1}{p_i{}'}=1,$ где $i=1,\dots,n,$ для пространства Лоренца, будем иметь

$$A \le \sup_{k_1,\dots,k_n\in N} \|f\|_{L_{\bar p 1}[0;1]^n} \left\|\Phi_{k_1,\dots,k_n}\right\|_{L_{\bar p'\infty}[0;1]^n} . \tag{3}$$

Рассмотрим норму $\left\|\Phi_{k_1,\dots,k_n}\right\|_{L_{\bar p'\infty}[0;1]^n}$, она равняется произведению норм, каждая из них является одномерной по каждой координате, т.е.

$$\left\|\Phi_{k_1,\dots,k_n}\right\|_{L_{\bar p'\infty}[0;1]^n} = \prod_{j=1}^{n} \left\|\Phi_{k_j}\right\|_{L_{p'_j,\infty}[0;1]}, \text{ где } \Phi_{k_j}=\sum_{m_j=1}^{k_i} \frac{k_j^{1/p'_j}}{\left|\sum\limits_{m_j=1}^{k_j} \lambda_{m_j}^{j}\right|} \lambda_{m_j}^{j} e^{-2\pi i m_j x_j} .$$

Коэффициенты Фурье функции Φ_{k_j} равны

$$b_{m_j}\left(\Phi_{k_j}\right)=\frac{k_j^{1/p'_j}}{\left|\sum\limits_{m_j=1}^{k_j} \lambda_{m_j}^{j}\right|}\lambda_{m_j}^{j}, \text{ если } m_j \le k_j, \quad \forall j=1,\dots,n;$$

$$b_{m_j}\left(\Phi_{k_j}\right)=0, \text{ если } m_j > k_j, \quad \forall j=1,\dots,n.$$

По лемме 3 получим

$$\prod_{j=1}^{n} \left\|\Phi_{k_j}\right\|_{L_{p'_j,\infty}[0;1]} \le \prod_{j=1}^{n} c_j \sup_{m_j\in N} m_j^{1/p} \left|m_j \,\Delta b_{m_j}\right| .$$

Оценим $m_j^{1/p}\left|m_j\,\Delta b_{m_j}\right|$. Пусть $m_j \le k_j, \quad \forall j=1,\dots,n.$ Тогда имеем

$$m_j^{1/p}\left|m_j\,\Delta b_{m_j}\right| = \frac{k_j^{1/p'_j} m_j^{1/p_j+1} \left|\lambda_{m_j}^{j}-\lambda_{m_j+1}^{j}\right|}{\left|\sum\limits_{m_j=1}^{k_j} \lambda_{m_j}^{j}\right|} \le \frac{k_j^{1/p'_j} m_j^{\alpha_j-1/p'_j}}{\left|\sum\limits_{m_j=1}^{k_j} \lambda_{m_j}^{j}\right|} \sup_{1\le m_j\le k_j} m_j^{2-\alpha_j} \left|\lambda_{m_j}^{j}-\lambda_{m_j+1}^{j}\right| .$$

При $m_j > k_j, \quad \forall j=1,\dots,n.$ $m_j^{1/p}\left|m_j\,\Delta b_{m_j}\right|=0.$

Таким образом, используя условие теоремы, имеем

$$\prod_{j=1}^{n} \left\|\Phi_{k_j}\right\|_{L_{p'_j,\infty}[0;1]} \le \prod_{j=1}^{n} c_j D_j \left(\frac{m_j}{k_j}\right)^{\alpha_j-1/p'_j} \le \prod_{j=1}^{n} C_j .$$

Вернемся к (3), получим

$$A \le \prod_{j=1}^{n} C_j \|f\|_{L_{\bar p,1}[0;1]^n} = C\|f\|_{L_{\bar p,1}[0;1]^n} .$$

Тогда верно

$$\|a\|_{n_{\bar p',\infty}(\lambda)} \le C\|f\|_{L_{\bar p,1}[0;1]^n} .$$

Используя теорему 1 и интерполяционную теорему 2 [4], получим требуемое неравенство. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Комитета науки МОН РК. № 1504/ГФ.

Список литературы

1 *Нурсултанов Е.Д.* Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Докл. РАН. — Т. 394.1. — 2004. — С. 22–25.

2 *Зигмунд А*. Тригонометрические ряды. — Т. 2. — М.: Мир, 1965. — С. 537.

3 *Stein Elias M.* Interpolation of linear operators / Trans. Amer. Math. Soc. — Т. 83. — 1956. — P. 482–492.

4 *Нурсултанов Е.Д.* О коэффициентах кратных рядов Фурье // Изв. РАН. Сер. Математика. — Т. 64.1. — 2000. — С. 95–122.

5 *Жантакбаева А.М., Нурсултанов Е.Д.* О суммируемости коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца // Вестн. МГУ. Сер. Математика-Механика. 2. — 2004. — С. 64–66.

6 *Zhantakbayeva A.M., Nursultanov E.D.* The Hardy-Littlewood-Stein inequality, CRM. — Barselona: PrePrint, 2012. — P. 1–20.

А.М.Жантақбаева

Еселі Фурье қатарларының коэффициенттерінің Харди типті түрлендіруі үшін Пэли теңсіздігі

Мақалада анизотропты Лоренц кеңістігіндегі функциялардың Фурье коэффициенттерінің жалпыланған Харди типті орталандыруының Пэли (Харди-Литтлвуд-Стейн) типті теңсіздігі алынған. Яғни көп айнымалылы функцияның $L_{\bar{p}\bar{q}}[0;1]^n$ кеңістігіне тиісті болуының кажетті шартын көрсететін функция нормасының төменгі бағалауы дәлелденген. $n_{\bar{p},\bar{q}}(\lambda)$ кеңістігі енгізіліп, оның интерполяциялық қасиеттері қарастырылған. Олардың қолданылуы арқылы негізгі нәтижелер дәлелденген.

A.M.Zhantakbayeva

Paley inequality for Hardy type transformation of coefficients of multiple Fourier series

In this paper we consider the inequality of Paley (Hardy-Littlewood-Stein) for generalized average of Hardy type for the coefficients of multiple Fourier series of functions from anisotropic Lorentz space. On the other hand this type of inequalities define necessary conditions for functions in $L_{\bar{p}\bar{q}}[0;1]^n$ space, i.e. the lower estimate for norm of functions from Lorentz space is proved. The space $n_{\bar{p},\bar{q}}(\lambda)$ is considered, Its interpolation and embedding properties are considered, which are used to obtain the main result of this work.

References

1 Nursultanov E.D. *Interpolation theorems for anisotropic functional spaces and its applications* // Dokl. RAN, vol. 394.1, 2004, p. 22–25.

2 Zigmund A. *Trigonometric series*, vol. 2, Moscow: Mir, 1965, p. 281.

3 Stein Elias M. *Interpolation of linear operators, Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 83, 1956, p. 482–492.

4 Nursultanov E.D. *On the coefficients of multiple Fourier series*. Izv. RAN. Ser. Mathematics, vol. 64.1, 2000.

5 Zhantakbayeva A.M., Nursultanov E.D. *On summability of Fourier coefficients of functions from Lorentz space* // Bull. MGU. Ser. Mathem.-Mekhanica, 2, 2004, p. 64–66.

6 Zhantakbayeva A.M., Nursultanov E.D. *The Hardy-Littlewood-Stein inequality, 1096, CRM*, Barselona: PrePrint, 2012, p. 1–20.