

## Имитационное моделирование измерительной информации для решения граничной обратной задачи теплопроводности

### Imitating modeling of measuring information for decision of heat conductivity boundary reverse problem

Телгожаева Ф.С.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы (e-mail: faridats@mail.ru)

Мақалада жылуөткізгіштіктің кері есебін шешу арқылы бөлшек-электрод байланыс ортасындағы температураны анықтауда кірме ақпараттар болып табылатын бөлшек-жылуөткізгіштік масса байланыс ортасында өлшенген температураны имитациялық пішімдеу әдісі ұсынылды.

The technique of imitating modelling of the measured temperature on a contact surface a detail - heat-removing weight which is the initial information for calculation of temperature of a surface an electrode - a detai by means of the decision of a boundary return problem of heat conductivity is offered.

#### Введение

Для решения граничной обратной задачи теплопроводности (ОЗТ) (задачи продолжения [1-3]) используется информация, включающая измеренные температуры на части границы расчетной области.

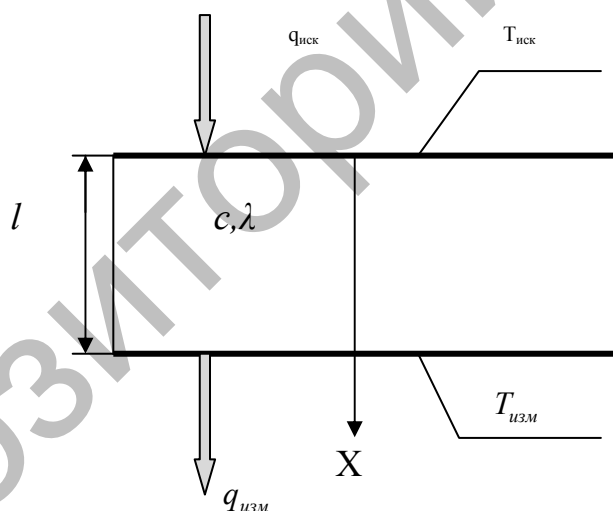


Рис. 1. Граничная обратная задача теплопроводности для пластины

Граничная ОЗТ для пластины (рис. 1) записывается следующим образом:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_{изм}, \quad x = l, \quad t > 0; \quad (2)$$

$$T(l, t) = T_{изм}, \quad x = l, \quad t > 0; \quad (3)$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \quad (4)$$

Здесь  $T = T(x, t)$  – температура;  $T_0$  – начальная температура;  $T_{иск}$  – искомая температура;  $T_{изм}$  – измеренная температура;  $q_{изм}$  – измеренная плотность теплового потока;  $l$  – толщина детали;  $\lambda, c$  – теплопроводность и удельная объемная теплоемкость.

Рассматриваемая ОЗТ имеет следующую формулировку: по данным измерения температуры  $T_{изм}$  и теплового потока  $q_{изм}$  на поверхности  $x = l$  определить искомую температуру  $T_{иск}$  на поверхности  $x = 0$ .

Использование для отработки алгоритма численного решения граничной ОЗТ данных натурального эксперимента о термометрировании исследуемого объекта не представляется возможным из-за наличия в экспериментальных данных методических и инструментальных погрешностей.

В настоящей работе предложена методика имитационного моделирования данных натурального эксперимента по определению измеренных температур  $T_{изм}$  применительно к решению граничной ОЗТ электроконтактного нагрева деталей почвообрабатывающих машин при электроконтактной термомеханической обработке [4, 5].

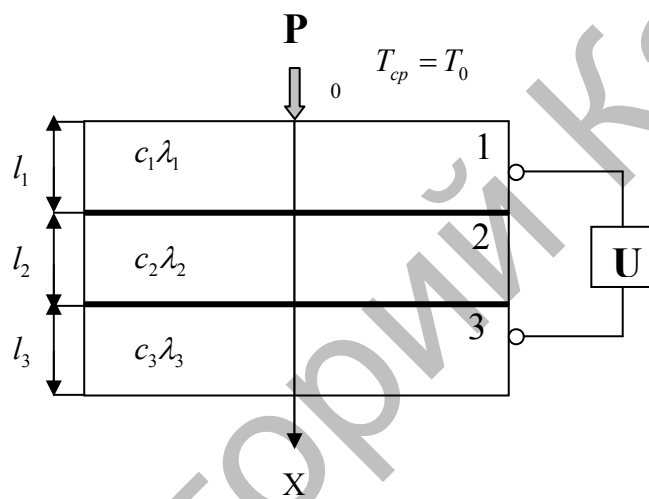


Рис. 2. Температурное поле

#### Постановка задачи

Температурное поле системы электрод– деталь– теплоотводящая масса (рис. 2) при нагреве детали под пластическую деформацию для осуществления процесса электроконтактного термомеханического деформирования описывается с помощью начально-краевой задачи теплопроводности:

$$c_j \rho_j \frac{\partial T_j}{\partial t} = \lambda_j \frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2}, \quad l_{i-1} < x < l_i, \quad 0 < t < \tau, \quad j = 1, 2, 3; \quad (5)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = 0, \quad x = l_0 = 0, \quad 0 < t < \tau; \quad (6)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{U \cdot I}{S}, \quad x = l_0, \quad 0 < t < \tau; \quad (7)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}, \quad T_2 = T_3, \quad x = l_2, \quad 0 < t < \tau; \quad (8)$$

$$-\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} = 0, \quad x = l_2 + l_3, \quad 0 < t < \tau; \quad (9)$$

$$T_i = T_0; \quad 0 < x < l_1; \quad 0 < x < l_2 + l_3; \quad i = 1, 2, 3; \quad t = 0. \quad (10)$$

Здесь  $T_j$  – температура  $j$ -ой области ( $j=1,2,3$ );  $c_j$  – удельная массовая теплоемкость;  $\rho_j$  – плотность;  $\lambda_j$  – коэффициент теплопроводности;  $\tau$  – время протекания процесса нагрева.

Для определения исходных данных, необходимых для решения граничной ОЗТ (1)-(4), вычислим модельную температуру  $T_{изм} = T(l_2t)$ .

#### Моделирование измеренной температуры

Для моделирования измеренной температуры поверхности деталь – теплоотводящая масса необходимо произвести расчет всего температурного поля  $T(x,t)$ . Для этого решим начально-краевую задачу (5)-(10) методом конечных разностей.

От области изменения непрерывного аргумента  $\omega = \left\{ (x, t) : 0 \leq x \leq l; l = \sum_{j=1}^3 l_j; 0 \leq t \leq \tau \right\}$  перейдем к области изменения дискретного аргумента – сеточной области  $\omega^h = \left\{ (x_i, t_k) : 0 \leq k \leq M; 0 \leq i \leq N; N = \sum_{j=1}^3 N_j; N_j = \frac{l_j}{h_j}; M = \frac{\tau}{\tau'} \right\}$  и заменим в уравнениях (5)-(9) частные производные отношениями конечных разностей.

Тогда получим явную разностную схему:

$$c_j \rho_j \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\tau'} = \lambda_j \frac{T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k}{h_j^2}; N_{j-1} < i < N_j; k = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, 3; \quad (11)$$

$$\frac{T_1^{k+1} - T_0^{k+1}}{h_1} = q_1, i = 0; k = 0, 1, 2, \dots; \quad (12)$$

$$\lambda_1 \frac{T_{N_1}^{k+1} - T_{N_1-1}^{k+1}}{h_1} = \lambda_2 \frac{T_1^{k+1} - T_0^{k+1}}{h_2} + \frac{UI}{S}; i = 0; k = 0, 1, 2, \dots; \quad (13)$$

$$\lambda_2 \frac{T_{N_2}^{k+1} - T_{N_2-1}^{k+1}}{h_2} = \lambda_3 \frac{T_{N_2+1}^{k+1} - T_{N_2}^{k+1}}{h_3}; i = N_2; k = 0, 1, 2, \dots; \quad (14)$$

$$\lambda_3 \frac{T_{N_3}^{k+1} - T_{N_3-1}^{k+1}}{h_3} = q_2; i = N_3; k = 0, 1, 2, \dots; \quad (15)$$

$$T_i^k = T_0; N_{j-1} \leq i \leq N_j; k = 0; j = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Разрешая уравнения (11)-(15) относительно неизвестной сеточной функции на  $k+1$ -ом временном слое, получаем расчетные формулы для вычисления температур в узлах сеточной области  $\omega^h$ :

$$T_i^{k+1} = (1 - 2\xi_1)T_i^k + \xi_1(T_{i+1}^k + T_{i-1}^k), N_0 < i < N_1; k = 0, 1, 2, \dots; \xi_1 = \frac{\lambda_1 \tau_1}{c_1 \rho_1 h_1^2}; \tau_1 = \tau'; \quad (17)$$

$$T_i^{k+1} = (1 - 2\xi_2)T_i^k + \xi_2(T_{i+1}^k + T_{i-1}^k), N_1 < i < N_2; k = 0, 1, 2, \dots; \xi_2 = \frac{\lambda_2 \tau_2}{c_2 \rho_2 h_2^2}; \tau_2 = \tau'; \quad (18)$$

$$T_i^{k+1} = (1 - 2\xi_3)T_i^k + \xi_3(T_{i+1}^k + T_{i-1}^k), N_2 < i < N_3; k = 0, 1, 2, \dots; \xi_3 = \frac{\lambda_3 \tau_3}{c_3 \rho_3 h_3^2}; \tau_3 = \tau'; \quad (19)$$

$$T_0^{k+1} = T_1^{k+1}, i = N_0 = 0; k = 0, 1, 2, \dots; \quad (20)$$

$$T_{N_1}^{k+1} = \left( T_{N_1-1}^{k+1} + \xi_4 T_{N_1+1}^{k+1} + \frac{h_1 UI}{\lambda_1 S} \right) / (1 + \xi_4), i = N_1, k = 0, 1, 2, \dots; \quad (21)$$

$$T_{N_2}^{k+1} = (T_{N_2-1}^{k+1} + \xi_5 T_{N_2+1}^{k+1}) / (1 + \xi_5), i = N_2; k = 0, 1, 2, \dots; \quad (22)$$

$$T_{N_3}^{k+1} = T_{N_3-1}^{k+1}, i = N_3; k = 0, 1, 2, \dots; \quad (23)$$

$$T_i^0 = T_0, 0 \leq i \leq N_3; k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Алгоритм вычисления модельной измеренной температуры контакта деталь – теплоотводящая масса по формулам (17)-(24) реализован на алгоритмическом языке *FORTRAN*. Блок-схема вычислительного процесса приведена на рисунке 3.

БЛОК-СХЕМА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

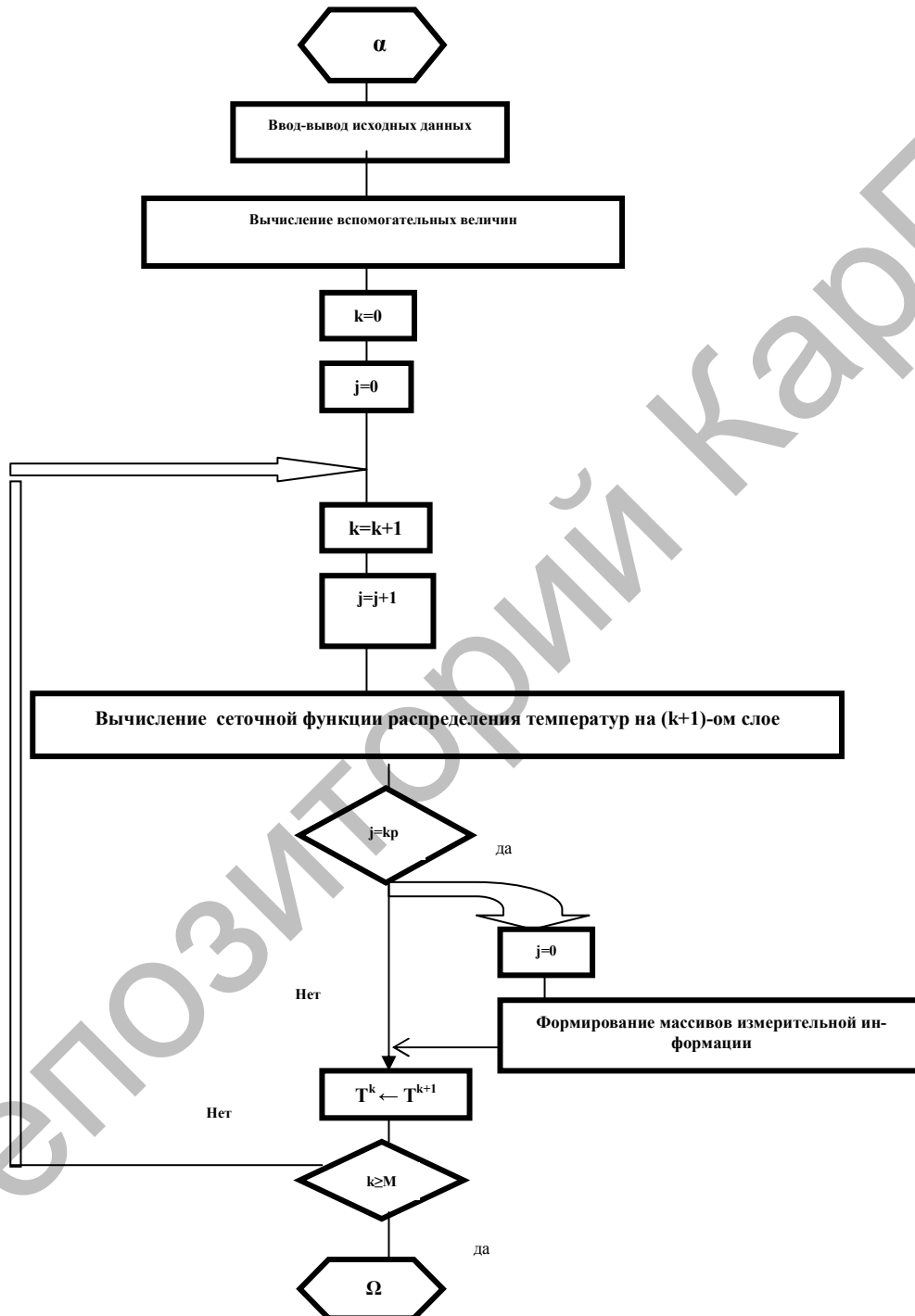


Рис. 3. Блок-схема процесса вычислений модельных измеренных температур на поверхности деталь – теплоотводящая масса

Вычисления осуществляются в следующем порядке:

1. Производится ввод-вывод исходных данных для выполнения расчетов; вводятся: геометрические размеры расчетных областей  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ ; шаги конечно-разностной сетки по пространственной

переменной  $h_1, h_2, h_3$ , теплофизические характеристики  $c_1, c_2, c_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ; время протекания процесса нагрева  $t_{\max}$ ; шаг конечно-разностной сетки по времени  $\tau$ ; электрическое напряжение  $U$ ; сила тока  $I$ ; площадь пятна контакта (области контактирования детали и электрода)  $S$ .

2. Вычисляются значения вспомогательных переменных: номера граничных узлов расчетной сетки  $N_1, N_2, N_3$ ; номера последнего временного слоя  $M$ ; параметры расчетной схемы  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ .

3. По переменным  $k$  и  $j$  производится организация счетчиков временных слоев для определения номера шага по времени, на котором осуществляется запись модельного значения измерительного сигнала в массив измеренных температур, и номера последнего слоя по времени для завершения вычислительного процесса.

4. По формулам (17)-(24) производится расчет температурного поля – сеточной функции  $T^{(h)}(x_j, t^k)$ , определенной в узлах сеточной области  $\omega^{(h)}$ .

5. Осуществляется проверка выполнения условия  $j = Kp$  ( $Kp$  – кратность считывания модельных температур в массив выходной информации); если условие выполнено, то производится считывание.

6. Осуществляется пересыл распределения температур в системе электрод–деталь–теплоотводящая масса на  $k + 1$ -ом шаге по времени (массив  $t1$ ) в массив  $t$  (распределение температур на  $k$ -ом шаге).

7. Проверяется условие завершения вычислительного процесса  $k = M$ ; если оно выполняется, то вычислительный процесс завершается, в противном случае вычисления повторяются, начиная с пункта 4. Таким образом, модельные значения измеренных температур вычислены и хранятся в массиве  $tizm$ .

#### References

1. *Atanbayev S.A.* Quasireference method and its application. — Almaty: Kainar, 1999. — 288 p.
2. *Vabishchevich P.N.* Continuation on a spatial variable in heat exchange boundary reverse problem // *Mathematical modeling.* — 1992. — Vol. 4. — № 4. — P. 44–54.
3. *Samarskij A.A., Vabishchevich P.N.* Computing heat transfer. — M: Science, 2003. — 784 p.
4. *Boltenkov A.A., Tchizhov V.N., Sheryshev V.P.* Mathematical model of electro contact burning process // *Mathematical education on Altai. Materials of the first regional conference on mathematical education on Altai.* — Barnaul: Publishing house BGPU, 2000. — P. 31–32.
5. *Holm R.* Electrical contacts. — M: SILT, 1961. — 464 p.