3. *Zenkov A.V.* Covers in the lattice of varieties of *m*-groups // Siberian Mathematical Journal. — 2006. — Vol. 47. — № 1. — P. 58–63.
4. *Zenkov A.V.* The minimal varieties of *m*-groups // Siberian Mathematical Journal. — 2009. — Vol. 50. — № 6. — P. 1035–1038.
5. *Isaeva O.V.* Covers in the lattice of varieties of *m*-groups // Algebra and Model theory — 4. Novosibirsk: NSTU. — 2003. — P. 35–43.
6. *Huss M.E., Reily N.R.* On reversing the order of lattice — ordered group // J. Algebra. — 1984. — Vol. 91. — P. 176–191.
7. *Holland W.Ch.* The largest proper variety of lattice — ordered groups // Proc. Am. Math. Soc. — 1976. — Vol. 57. — № 1. — P. 25–28.
8. *Kopytov V.M., Rachunek J.* The largest proper variety of *m*-groups // Algebra and logic. — 2003. — Vol. 42. — № 5. — P. 624–635.

УДК 517.956.3+519.642.5

Обратная задача геоэлектрики в дискретной постановке

Inverse problem geoelectrics in discrete formulation

Шолпанбаев Б.Б.

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы (e-mail: Bahtygerey@mail.ru)

Мақалада Максвелл теңдеулер жүйесінің (толқындық түрі) кері коэффициенттік есебі қарастырылды. Оське параллель жер бетінде орналасқан, бірден қосылған және арнайы берілген шеткері тоққа байланысты Максвелл теңдеулер жүйесі электр өрісінің бір компонентіне байланысты екі өлшемді есебіне келтірілген. Дискреттік қойылымдағы геоэлектрика теңдеуінің кері коэффициенттік есебін шешудің тиімділеу тәсілі берілген. Дискреттік деңгейдегі функционал градиенті тұрғызылған. Функционалды минимизациялау үшін жылдам түсу әдісі қолданылған.

In this paper we consider the inverse coefficient problem for Maxwell's equations (wave version). If the special task of the external current, corresponding to instantaneous switching, parallel to the axis centered on the earth's surface the system of Maxwell's equations is reduced to two-dimensional problem with respect to one component of the electric field. We consider the optimization method for solving the inverse conductivity problem for the equation of geoelectrics in discrete formulation. A gradient of the functional on a discrete level is constracted. To minimize the functional we use the method of steepest descent.

Постановка основной задачи. Сформулируем постановку прямой и обратной задач для системы уравнений Максвелла [1–2]:

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} E - rotH + \sigma E + j^{cm} = 0, & x_3 \neq 0, \quad (x_1, x_2, x_3) \in R^3. \\ \mu \dfrac{\partial}{\partial t} H + rotE = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $E = (E_1, E_2, E_3)^T$, $H = (H_1, H_2, H_3)^T$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей; ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость среды; σ — проводимость среды; j^{cm} — плотность сторонних токов.

Рассматривается геофизическая модель, в которой поверхность Земли считается плоской. Физическое пространство R^3 переменных $x = (x_1, x_2, x_3)$ разобьем плоскостью $x_3 = 0$ на два полупространства:

$$R^3_- = \{x \in R^3 \mid x_3 < 0\} \qquad \text{(воздух)},$$

$$R^3_+ = \{x \in R^3 \mid x_3 > 0\} \qquad \text{(земля)}.$$

Полагаем в R^3_- параметры ε, μ, σ постоянными, а в R^3_+ — гладкими функциями до границы $x_3 = 0$.

Коэффициенты ε, μ, σ на границе $x_3 = 0$ имеют конечный разрыв, поэтому система (1) понимается следующим образом: считается, что для векторов E, H система (1) выполнена отдельно для точек $x \in R^3_-$, $x \in R^3_+$, а при $x_3 = 0$ тангенциальные компоненты векторов E, H удовлетворяют условиям непрерывности:

$$E_j|_{x_3=-0} = E_j|_{x_3=+0},\ H_j|_{x_3=-0} = H_j|_{x_3=+0},\ j = 1, 2. \tag{2}$$

Полагаем, что электромагнитное поле до момента времени $t = 0$ отсутствует:

$$(E,H)\big|_{t<0} = 0, \quad j^{cm}\big|_{t<0} = 0, \tag{3}$$

а затем возбуждается сторонним (внешним) током $j = j(x,t)$.

Задачу (1)–(3) при заданных коэффициентах ε, μ, σ и стороннем токе j^{cm} называют прямой задачей.

В разведочной геофизике наибольший интерес представляют задачи по определению коэффициентов ε, μ, σ как функции точки $x \in R^3_+$. Для определения этих коэффициентов на плоскости $x_3 = 0$ задаются тангенциальные компоненты электромагнитного поля, отвечающие решению задачи (1)–(3):

$$E_j|_{x_3=0} = \chi_j(x_1, x_2, t),\ H_j|_{x_3=0} = \psi_j(x_1, x_2, t),\ \ j = 1,2. \tag{4}$$

Суть обратной задачи состоит в определении ε, μ, σ по известным функциям χ_j, ψ_j, $j = 1,2$.

Функции χ_j, ψ_j связаны между собой линейными соотношениями. То есть если функции χ_j известны, то, решая (1) при условиях (3) с начально-краевыми условиями $E_j|_{x_3=0} = \chi_j$, $j = 1,2$, можно однозначно найти E, H, а следовательно, и вычислить функцию ψ_j, $j = 1,2$. Тогда в (4) независимы только две функции: χ_1, χ_2 или ψ_1, ψ_2.

Постановка обратной задачи с данными (4) является переопределенной, для определения трех функций одной переменной задается функция трех переменных. В монографии В.Г. Романова [1] показано, что для однозначного решения обратной задачи достаточно задать преобразование Фурье функции $\chi_1(x_1, x_2, t)$ по переменным x_1, x_2 при трех различных значениях параметра преобразования $\nu = \nu^k = (\nu_{1k}, \nu_{2k})$, $k = 1,2,3$, и можно выделить такую информацию, при которой размерность определяемых функций и используемой для этого информации совпадают. Мы рассмотрим и построим оптимизационный метод решения обратной задачи для системы уравнений Максвелла, изложенный в монографии В.Г.Романова, С.И. Кабанихина [2].

Пусть источник стороннего тока имеет вид

$$j^{cm} = (0,1,0)^T g(x_1)\delta(x_3)r(t). \tag{5}$$

Здесь через $(\ldots)^T$ обозначен вектор-столбец, $g(x_1)$, $\theta(t)$ — функции, описывающие распределение источника по переменным x_1, t соответственно.

Задание стороннего тока в виде (5) соответствует мгновенному включению тока, параллельного оси x_2, сосредоточенного на земной поверхности $x_3 = 0$ и распределенного по оси x_1 с плотностью $g(x_1)$. Предположим, что коэффициенты системы уравнений Максвелла не зависят от переменной x_2:

$$\varepsilon = \varepsilon(x_1, x_3) > 0, \qquad \mu = \mu(x_1, x_3) > 0, \qquad \sigma = \sigma(x_1, x_3) \geq 0. \tag{6}$$

При принятых предположениях (5), (6) в системе уравнений Максвелла ненулевыми останутся только три компоненты: E_2, H_1, H_3, и сама система (1) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t}E_2 + \dfrac{\partial}{\partial x_1}H_3 - \dfrac{\partial}{\partial x_3}H_1 + \sigma E_2 + g(x_1)\delta(x_3)r(t) = 0, \\ \mu\dfrac{\partial}{\partial t}H_1 - \dfrac{\partial}{\partial x_3}E_2 = 0, \qquad \mu\dfrac{\partial}{\partial t}H_3 + \dfrac{\partial}{\partial x_1}E_2 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Пусть известна дополнительная информация вида

$$E_2|_{x_3=0} = \varphi_{(1)}(x_1, t). \tag{8}$$

Необходимым условием того, что функция $\varphi_{(1)}(x_1,t)$ является следом решения задачи (7) с начальным условием $(E_2, H_1)|_{t<0} = 0$ является равенство $\varphi_{(1)}(x_1,+0) = g(x_1)/2$. Если функция $\varphi_{(1)}(x_1,t)$ задана, а коэффициенты системы (7) известны при $x_3 = 0$, то, используя (8) как граничное условие, решим прямую задачу при $x_3 \le 0$, т.е. определим:

$$H_1|_{x_3=+0} = \varphi_{(2)}(x_1,t). \tag{9}$$

Задание условия (9) дает возможность вычисления прямой задачи при $x_3 < 0$ (в воздухе) освободиться от необходимости учета условий склейки на границе $x_3 = 0$ и ограничиться при численном решении обратной задачи минимальной по размеру областью в плоскости переменных x_3, t.

После исключения из системы (7) частных производных компонент H_1, H_3 получим относительно E_2 уравнения:

$$\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_2 + \sigma\frac{\partial}{\partial t}E_3 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_1}E_2\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_3}E_2\right) + g(x_1)\delta(x_3)r'(t), \tag{10}$$

$$x_1 \in R^1, \quad x_3 > 0, \quad t > 0, \tag{11}$$

$$E_2\big|_{t<0} = 0,$$

$$E_2|_{x_3=+0} = \varphi_{(1)}(x_1,t), \quad \left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_3}E_2\right)\Bigg|_{x_3=+0} = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_{(2)}(x_1,t). \tag{12}$$

Если коэффициенты уравнения (10) не зависят от переменной x_1, то, применяя преобразование Фурье $F_{x_1}[\cdot]$, получим постановку одномерной задачи:

$$\nu_{tt} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\nu_t = \frac{1}{\mu\varepsilon}\left(\nu_{x_3x_3} - \lambda^2\nu\right) - \theta, \qquad x_3 \in R^1, \tag{13}$$

$$\nu\big|_{t<0} = 0, \tag{14}$$

$$\left(\frac{1}{\mu}\nu_{x_3}(0,t)\right)\Bigg|_{x_3=+0} = f_{(2)}(t), \tag{15}$$

$$\nu(0,t) = f_{(1)}(t), \tag{16}$$

где λ — параметр Фурье, $v(x_3,t) = F_{x_1}[E_2(x_1,0,x_3,t)], \qquad \theta = g(x_1)q(x_3)r'(t),$

$$f_{(1)}(t) = F_{x_1}[\varphi_{(1)}(x_1,t)], \qquad f_{(2)} = F_{x_1}\left[\frac{d}{dt}\varphi_{(2)}(x_1,t)\right].$$

Прямая задача. По известным значениям ε, μ, σ найти $\nu(x_3,t)$ как решение смешанной задачи (13)–(16).

Возможны следующие постановки обратных задач.

Обратная задача (I). Найти $\sigma(x_3)$, $\nu(x_3,t)$ из (13)–(16) по известной $f_{(1)}^{\lambda}(t)$ при фиксированном $\lambda = \lambda_0$.

Обратная задача (II). Найти $\varepsilon(x_3)$, $\nu(x_3,t)$ из (13)–(16) по известной $f_{(1)}^{\lambda}(t)$ при фиксированном $\lambda = \lambda_0$.

Обратная задача (III). Найти $\varepsilon(x_3)$, $\sigma(x_3)$, $\nu(x_3,t)$ из (13)–(16) по известным $f_{(1)}^{\lambda}(t)$ при $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$.

Алгоритмы решения обратной задачи. Для численного решения прямой задачи (13)–(16) использовалась неявная схема. В качестве аппроксимаций функций $q(x_3)$, $r'(t)$ примем

$$q(x_3) \cong \begin{cases} \cos(\pi(x_3/t_0+1))+1, & x_3 \in [-l_0, 0], \\ 0, & x_3 \notin [-l_0, 0], \end{cases}$$

$$r'(t) \cong \begin{cases} \cos(\pi(t\tau/t_0-1))+1, & t \in [0, t_0], \\ 0, & \tau_3 \notin [0, t_0], \end{cases}$$

Функции $q(x_3)$, $r'(t)$ приближенно описывают колоколообразный тип источника, близкий к реальной ситуации. При численном решении целесообразно построить сетку, сгущающуюся в области больших изменений функций $q(x_3)$, $r'(t)$. Используя, например, методику построения таких сеток из работы [3], получим:

$$t(q)=\begin{cases}\dfrac{t_0}{2\pi}\arccos\left(1-\dfrac{2q}{q_0}\right), & 0\le q\le q_0,\\ t_0-\dfrac{t_0}{2\pi}\arccos\left[1-\dfrac{2(q_1-q)}{q_1-q_0}\right], & q_0\le q\le q_1,\\ aq+b, & q_1\le q\le 1.\end{cases} \tag{17}$$

Здесь $a=(t_0-1)/(q_1-1), \quad b=(q_1-t_0)/(q_1-1)$. Основная идея построения таких сеток заключается в следующем. Функция $r'(t)$ симметрична относительно точки $t=t_0/2$, поэтому отрезок $[0,1]$ разбиваем на три участка: $[0,q_0],[q_0,q_1],[q_1,1]$. Первый из них отвечает большим изменениям функции $r'(t)$ (при $0<t\le\frac{t_0}{2}$), и отображение t (q) на этом участке строится как обратная к ней функция. Обозначим ее через $t_1(q)$ (при $0\le q\le q_0$).

Второй участок, в силу симметрии $r'(t)$, получается зеркальным отображением $t_1(q)$, обозначим его через $t_2(q)$ и, наконец, третий участок отвечает за разрежение сетки; отображение $t(q)=t_3(q)$ на этом участке можно построить, например, линейным образом: $aq+b$. После склейки отображений $t_1(q)$, $t_2(q)$, $t_3(q)$ получим неравномерную сетку (17).

Приведем алгоритм решения обратной задачи (I). Пусть известна дополнительная информация

$$u(0,t;\sigma)=f(t). \tag{18}$$

Пусть p — приближенное решение обратной задачи. Рассмотрим функционал

$$\mathrm{J}\,(\mathrm{p})=\int_0^T[u(0,t;\,p)-f(t)]^2\,dt. \tag{19}$$

По той же схеме, как это описано в [3], вычислим градиент:

$$\nabla J(p)=\int_0^T\Phi u_t\,dt. \tag{20}$$

Здесь Φ — решение сопряженной задачи:

$$\varepsilon\Phi_{tt}-p\Phi_t=\Phi_{x_3x_3}-\lambda_\varepsilon^2\Phi.,\ 0<x_3<l,\quad 0<t<T, \tag{21}$$

$$\Phi\,|_{t=T}=0,\qquad \Phi_t\,|_{t=T}=0, \tag{22}$$

$$\Phi\,|_{x_3=0}=0,\qquad \Phi\,|_{x_3=l}=0, \tag{23}$$

$$\Phi_{x_3}\Big|_{x_3=0}=2[u(0,t;p)-f(t)]. \tag{24}$$

Следуя работе [4], приведем эффективный алгоритм решения обратной задачи оптимизационным методом в дискретной постановке. Рассмотрим дискретный аналог функционала (19):

$$J_h(p_h)=\tau\sum_{k=1}^M[y_0^k-f^k]^2. \tag{25}$$

Повторяя методику из работы [4], для нашего случая получим, что градиент функционала (25) имеет вид:

$$J_h(p_h)=\tau y_i^0\psi_i^1+\tau\sum_{k=2}^M y_i^k\psi_i^{k-1}, \tag{26}$$

где y_i^k — решение прямой задачи:

$$\varepsilon y_{\bar{t}t}+py_t=y_{\bar{x}_3x_3}-\lambda^2y_i,\ 1<i<N,\ 1<k<M, \tag{27}$$

$$y_i^0 = 0, \quad y_{t,0} = 0, \quad i = \overline{0..N}, \tag{28}$$

$$y_{x_3,0} = f^k, \quad k = \overline{1..M}, \tag{29}$$

$$y_N^k = 0, \ k = \overline{1..M}, \tag{30}$$

а сеточная функция ψ_i^k — решение сопряженной задачи:

$$\varepsilon\psi_{tt} - p\psi_{\bar{t}} = \psi_{x_3x_3} - \lambda^2\psi, \ k = M\text{–}1, .., 2, \ \mathrm{i} = 1..N\text{–}1, \tag{31}$$

$$\psi_i^M = 0, \quad \psi_{\bar{t},i}^M = 0, \tag{32}$$

$$\psi_0^k = 0, \quad \psi_N^k = 0, \quad k = \overline{1..M} - 1, \tag{33}$$

$$\psi_{x_3,0} = 2[y_0^k - f^k]. \tag{34}$$

Приведем общую схему оптимизационного метода:

1^0. Задаем начальное приближение $p^{(0)}(x_3)$, решаем прямую задачу (27)–(30), находим $y^{(0)}\{(x_3)_i, t_k, p^{(0)}(x_3)\}$.

2^0. Вычисляем краевые условия (34) и решаем сопряженную задачу (31)–(34), находим $\psi^{(0)}\{x_3, t_k, p^{(0)}(x_3)\}$.

3^0. Вычисляем градиент функционала (26).

4^0. По методу спуска $p^{n+1}(x_3) = p^n(x_3) - \alpha_n \nabla J(p^n(x_3))$ находим очередное приближение $p^{(1)}(x_3)$.

5^0. Вычисляем значение функционала (25) Если он достиг минимума, то полагаем в качестве приближенного решения обратной задачи функцию $p(x_3) = p^{(1)}(x_3)$, если нет, то, полагая $p^{(0)}(x_3) = p^{(1)}(x_3)$, возвращаемся к пункту 2^0.

References

1. *Romanov V.G.* Inverse problems in mathematical physics. — M.: Nauka, 1984. — 263 p.
2. *Romanov V.G., Kabanikhin S.I.* Inverse problems geoelectrics. — M.: Nauka, 1991. — 303 p.
3. *Kabanikhin S.I., Iskakov K.T.* Optimization methods for solving the coefficient inverse problems. — Novosibirsk.: RIP NSU. — 2001. — 316 p.
4. *Iskakov K.T., Oralbekova ZH.O.* Discrete analog optimization method for solving the inverse problem for a parabolic equation. // Vestnik KarSU. Ser. Mathematic. — 2010. — № 2 (58). — P. 111–115.