3. *Polubarinova-Kochina P.Ya.* Theory of underground water moving. — M.: Science, 1977. — 664 p.
4. *Konovalov A.N.* Problems of multiphase incompressible fluid filtration. — Novosibirsk: Science,. Siberian branch, 1988. — 166 p.
5. *Nigmatullin R.I.* Dynamics of multiphase medium. — T. 2. — M.: Science, 1988. — 359 p.
6. *Heifets L.I., Neimark A.V.* Multiphase processes in porous medium. — M.: Himiya, 1982. — 319 p.
7. *Kornilina M.A., Samarskaya E.A. and etc.* Modeling of oil fields development at parallel computational systems // Mathematical modeling. — T. 7. — № 2. — 1995. — P. 35–48.
8. Kazakevich G.I., Klochkova L.V. and etc. Processes of hydrocarbons migration in real geological regions // Mathematical modeling. —T. 10. — №6. — 1998. — P.20–30.
9. *Mukimbekov M.Zh.* Modeling of control process in oil production // Works of fifth All-Russian scientific conference with international participation «Mathematical modeling and boundary problems». Part 3. — Samara, 2008. — P. 136–139.
10. *Samarskii A.A.* Theory of difference schemes. — M.: Science, 1989. — 616 p.
11. *Anderson D., Tannehill J.* Computational hydromechanics and heat exchange. — M.: Mir, 1990. — 384 p.
12. *Votsalski E.S., Kuandykov B.M. and etc.* Oil and gas fields of Kazakhstan // Hand-book. By edition Abdullin A.A. — M., 1993. — 247 p.
13. *Tesljuk E.V.* Questions of nonithotermal filtration in theory and practice of Mangyshlak peninsula's oil fields development // Development of oil fields and hydrodynamics of stratum. — M.: Nedra, 1970. — P. 120—134.

УДК 532.5:519.8

Оптимизация технологических параметров воздействия на пласт

Optimization of impact technological parameters to stratum

Мукимбеков М.Ж.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы (e-mail: m_mukim@fromru.com)

Мұнай кен орындарын өңдеуде қабатқа әрекет жасауда технологиялық көрсеткіштерді оптимизациялау есебі пайда болады. Сондай есептердің бірі — судың айдайтын мөлшерін анықтауда қажетті мұнай қабатының гидродинамикалық жағдайына жету. Мақалада осы есепке оңтайлы жүйе анықталды. Есепті шешуде есептеу алгоритмі берілді.

On the time of oil fields elaboration the problem of technological indices optimization of impact to stratum is appeared. One of them is the problem of injected water quantity to stratum definition for desirable hydrodynamic state of oil body. In the paper optimal system for this problem is deduced. Computational algorithm for its solving is offered.

Постановка задачи

Во время разработки нефтяных месторождений возникает ряд вопросов по оптимизации различных технологических показателей эксплуатации месторождения. Одним из них является задача определения количества закачиваемой воды в пласт для достижения желаемого гидродинамического состояния нефтяного массива. Это связано, с одной стороны, с уменьшением затрат на закачку воды на нагнетательных скважинах. С другой — процесс обводнения нефтяных массивов является нежелательным моментом в добыче нефти, так как может произойти обводнение добывающих скважин, что в свою очередь может повлиять на нефтеотдачу пласта [1–8].

Целью работы является построение вычислительного алгоритма, позволяющего находить минимальное количество закачиваемой воды в пласт для достижения желаемого гидродинамического состояния нефтяного коллектора на задаваемый промежуток разработки месторождения. Задачу будем моделировать с помощью функционала, который представляет собой сумму количества закачиваемой воды в пласт и отклонение давления пласта от «желаемого» пластового давления за весь промежуток разработки нефтяного месторождения. Управлением здесь является расход количества закачиваемой воды за единицу времени. Для решения задачи минимизации функционала необходимо определение градиента функционала, после чего минимизация функционала проводится численно с помощью метода градиентов.

Фильтрационное течение в нефтяном пласте опишем уравнениями течения двухфазной несжимаемой жидкости (в безразмерном виде), основанными на модели Маскета-Леверетта:

$$m\frac{\partial s_B}{\partial t}+div\overline{W}_B=c\sum_{i=1}^{N_1}f_i(t)\delta(x-x_{нi},y-y_{нi})-c\sum_{i=1}^{N_2}rq_i\delta(x-x_{дi},y-y_{дi}); \tag{1}$$

$$m\frac{\partial s_H}{\partial t}+div\overline{W}_H=-c\sum_{i=1}^{N_2}q_i(t)\delta(x-x_{дi},y-y_{дi}), \tag{2}$$

где

$$s_B+s_H=1,\ \overline{W}_B=-k\frac{f_B}{\mu_B}\nabla p_B,\ \overline{W}_H=-k\frac{f_H}{\mu_H}\nabla p_H; \tag{3}$$

$$p_H-p_B=p_k(s_B); \tag{4}$$

$$r=\frac{f_B\mu_H\rho_B}{f_H\mu_B\rho_H},\quad c=\frac{1}{Hd};$$

$$J(f_1,...,f_{N_1})=\frac{c^2}{2}\sum_{i=1}^{N_1}\int_0^T f_i^2(t)dt+\frac{e}{2}\int_0^T\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}(p_H-p_z)^2dxdydt+\frac{n}{2}\int_0^T\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}s_B{}^2dxdydt\to\inf. \tag{5}$$

Здесь s_B – насыщенность воды; s_H – насыщенность нефти; p_B, p_H – давление воды и нефти соответственно; p_k – капиллярное давление; r – функция, участвующая в оценке количества выходящей воды вместе с добываемой нефтью из добывающей скважины; H – толщина пласта; k – абсолютная проницаемость пласта; m – пористость пласта; ρ_B,ρ_H – плотность воды и нефти соответственно; f_B,f_H – относительные фазовые проницаемости воды и нефти соответственно; $f_i(t)$ – расход количества закачиваемой воды в i-ой нагнетательной скважине; q_i – расход количества выкачиваемой нефти из i-ой добывающей скважины; p_z – задаваемое значение давления нефтяного пласта соответственно; d – обезразмеривающая величина, равная $\frac{k_0p_0}{\mu_0L^2}$, где k_0,p_0,μ_0,L – некоторые постоянные величины, соответствующие безразмерным переменным: абсолютной проницаемости пласта, давлению пласта, вязкости нефти, длине нефтяного месторождения; $(x_н,y_н)$ – координаты нагнетательной скважины; $(x_д,y_д)$ – координаты добывающей скважины.

Считаем, что толщина пласта, плотность, вязкость воды и нефти соответственно являются постоянными величинами. $\Omega=(x,y:0\le x\le l_1,0\le y\le l_2)$ – область месторождения; Γ – граница области месторождения.

В начальный момент задается насыщенность воды по всей области

$$s_B\big|_{t=0}=s^0, \tag{6}$$

на границе задается условие для давления, означающее, что на границе объемные фазовые расходы равны нулю

$$\left.\frac{\partial p_B}{\partial n}\right|_\Gamma=0,\ \left.\frac{\partial p_H}{\partial n}\right|_\Gamma=0,\ \left.\frac{\partial s_B}{\partial n}\right|_\Gamma=0. \tag{7}$$

В дальнейшем предположим, что расход закачиваемой воды $f_1(t)$ для нагнетательной скважины с координатами $(x_{н1},y_{н1})$ является эталонным, а для остальных нагнетательных скважин имеется связь: $f_i(t)=k_if_1(t)$, $k_1=1$, $i=1...N_1$, где k_i – некоторые числа. Дополнительно вводятся следующие обозначения: $\chi=k\frac{f_B}{\mu_B}$, $\sigma=k\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial p_k}{\partial s_B}$, $\tau=k\frac{f_H}{\mu_H}$, $p=p_H$; $s=s_B$. Тогда с учетом этого, после некоторых преобразований, уравнения (1), (2) примут следующие виды соответственно:

$$-div((\chi+\tau)\nabla p+\sigma\nabla s)=cf(t)\sum_{i=1}^{N_1}k_i\delta(x-x_{нi},y-y_{нi})-c\sum_{i=1}^{N_2}(1+r)q_i\delta(x-x_{дi},y-y_{дi}); \tag{8}$$

$$m\frac{\partial s}{\partial t}-div(\sigma\nabla s+\chi\nabla p)=cf(t)\sum_{i=1}^{N_1}k_i\delta(x-x_{нi},y-y_{нi})-c\sum_{i=1}^{N_2}rq_i\delta(x-x_{дi},y-y_{дi}); \tag{9}$$

$$s\big|_{t=0} = s^0; \qquad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = 0, \qquad (11)$$

а функционал принимает следующий вид:

$$J(f) = \frac{K}{2}\int_0^T f^2(t)dt + \frac{e}{2}\int_0^T\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}(p-p_z)^2 dxdydt + \frac{n}{2}\int_0^T\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} s^2 dxdydt, \qquad (12)$$

где коэффициент K имеет вид:

$$K = c^2\sum_{i=1}^{N1} k_i^2 .$$

Рассмотрим следующую приближенную задачу [9]:

$$J_\varepsilon(f) = J(f) + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}(-div((\chi+\tau)\nabla p + \sigma\nabla s) - cf(t)\sum_{i=1}^{N_1} k_i(t)\delta(x-x_{нi}, y-y_{нi}) +$$

$$+ c\sum_{i=1}^{N_2}(1+r)q_i\delta(x-x_{\partial i}, y-y_{\partial i}))^2 dxdydt +$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}(m\frac{\partial s}{\partial t} - div(\sigma\nabla s + \chi\nabla p) - cf(t)\sum_{i=1}^{N_1} k_i\delta(x-x_{нi}, y-y_{нi}) + c\sum_{i=1}^{N_2} rq_i\delta(x-x_{\partial i}, y-y_{\partial i}))^2 dxdydt \to \inf. \qquad (13)$$

Определение 1. Допустимой функцией f назовем такую функцию, которая удовлетворяет соотношениям

$$-div((\chi+\tau)\nabla p + \sigma\nabla s) - cf(t)\sum_{i=1}^{N_1} k_i\delta(x-x_{нi}, y-y_{нi}) + c\sum_{i=1}^{N_2}(1+r)q_i\delta(x-x_{\partial i}, y-y_{\partial i}) = o(\varepsilon); \qquad (14)$$

$$m\frac{\partial s}{\partial t} - div(\sigma\nabla s + \chi\nabla p) - cf(t)\sum_{i=1}^{N_1} k_i\delta(x-x_{нi}, y-y_{нi}) + c\sum_{i=1}^{N_2} rq_i\delta(x-x_{\partial i}, y-y_{\partial i}) = o(\varepsilon). \qquad (15)$$

Предположим, что множество допустимых функций не пусто.

Определение 2. Функция f_ε называется оптимальной, если она удовлетворяет соотношению

$$\inf_{f\in U} J_\varepsilon = J_\varepsilon(f_\varepsilon),$$

где U — множество допустимых управлений.

Из изложенного выше следует, что минимизация функционала в (13) дает в свою очередь минимизацию исходного функционала в (12).

В дальнейшем для решения задачи минимизации функционала в (13) нам необходимо найти явный вид градиента этого функционала, который находится из системы необходимых условий оптимальности, приведенной ниже [9]. Для этого введем следующие сопряженные состояния:

$$\vartheta_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}(-div((\chi+\tau)\nabla p + \sigma\nabla s) - cf(t)\sum_{i=1}^{N_1} k_i\delta(x-x_{нi}, y-y_{нi}) + c\sum_{i=1}^{N_2}(1+r)q_i\delta(x-x_{\partial i}, y-y_{\partial i}));$$

$$\theta_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}(m\frac{\partial s}{\partial t} - div(\sigma\nabla s + \chi\nabla p) - cf(t)\sum_{i=1}^{N_1} k_i\delta(x-x_{нi}, y-y_{нi}) + c\sum_{i=1}^{N_2} rq_i\delta(x-x_{\partial i}, y-y_{\partial i})),$$

удовлетворяющие сопряженной системе

$$div((\chi+\tau)\nabla\vartheta_\varepsilon) + div(\chi\nabla\theta_\varepsilon) + e(p_\varepsilon - p_z) =$$

$$= \vartheta_\varepsilon c\sum_{i=1}^{N_2}(1+r)q_{pi}\delta(x-x_{\partial i}, y-y_{\partial i}) + \theta_\varepsilon c\sum_{i=1}^{N_2} rq_{pi}\delta(x-x_{\partial i}, y-y_{\partial i}); \qquad (16)$$

$$-m\frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial t} - div(\sigma(\nabla\theta_\varepsilon + \nabla\vartheta_\varepsilon)) + \sigma_s(\nabla\theta_\varepsilon + \nabla\vartheta_\varepsilon)\nabla s_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon((\chi_s + \tau_s)\nabla\vartheta_\varepsilon - \chi_s\nabla\theta_\varepsilon) =$$

$$= ns_\varepsilon - \vartheta_\varepsilon c\sum_{i=1}^{N_2}((1+r)q_i)_s\delta(x-x_{\partial i}, y-y_{\partial i}) + \theta_\varepsilon c\sum_{i=1}^{N_2}(rq_i)_s\delta(x-x_{\partial i}, y-y_{\partial i}) \qquad (17)$$

и условиям

$$\int_0^T\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}[\frac{Kf_\varepsilon(t)}{mes\Omega}+c(\theta_\varepsilon+\vartheta_\varepsilon)\sum_{i=1}^{N_1}k_i\delta(x-x_{нi},y-y_{нi})](f-f_\varepsilon)dxdydt\ge 0. \quad (18)$$

Здесь f – произвольный элемент из множества допустимых управлений.

Соответственно запишем начальное и граничные условия для $\theta_\varepsilon,\vartheta_\varepsilon$:

$$\theta_\varepsilon\Big|_{t=T}=0;\ \frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial n}\Big|_\Gamma=0;\ \frac{\partial\vartheta_\varepsilon}{\partial n}\Big|_\Gamma=0. \quad (19)$$

Уравнения в ε -задаче будут иметь следующие виды соответственно:

$$-div((\chi+\tau)\nabla p_\varepsilon+q\nabla s_\varepsilon)=cf_\varepsilon(t)\sum_{i=1}^{N_1}k_i\delta(x-x_{нi},y-y_{нi})-c\sum_{i=1}^{N_2}(1+r_\varepsilon)q_{\varepsilon i}\delta(x-x_{\partial i},y-y_{\partial i}); \quad (20)$$

$$m\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial t}-div(q\nabla s_\varepsilon+\chi\nabla p_\varepsilon)=cf_\varepsilon(t)\sum_{i=1}^{N_1}k_i\delta(x-x_{нi},y-y_{нi})-c\sum_{i=1}^{N_2}r_\varepsilon q_{\varepsilon i}\delta(x-x_{\partial i},y-y_{\partial i}); \quad (21)$$

$$s_\varepsilon\Big|_{t=0}=s^0,\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial n}\Big|_\Gamma=0,\ \frac{\partial s_\varepsilon}{\partial n}\Big|_\Gamma=0. \quad (22)$$

Таким образом, (16)-(22) будут представлять структуру системы необходимых условий оптимальности для модели Маскета-Леверетта.

Вычислительный алгоритм

Минимизирующиеся последовательности строятся следующим образом [10]:

$$f_\varepsilon^{n+1}(t)=f_\varepsilon^n(t)-\alpha^n J_\varepsilon^n, \quad (23)$$

где J_ε^n — градиент функционала в (18), имеющий вид

$$J_\varepsilon^n=\frac{Kf_\varepsilon(t)}{mes\Omega}+c(\theta_\varepsilon+\vartheta_\varepsilon)\sum_{i=1}^{N_1}k_i\delta(x-x_{нi},y-y_{нi}). \quad (24)$$

Численный алгоритм нахождения минимального количества закачиваемой воды состоит из следующих этапов.

1. Задаем начальное приближение $f^o(t)$. После этого решаем уравнения (20), (21) с условиями (22) на всем временном промежутке (0,T] при заданном начальном приближении $f^o(t)$, в результате которого находим $p_\varepsilon,s_\varepsilon$ на всем промежутке времени.

2. Используя найденные $p_\varepsilon,s_\varepsilon$ из уравнений (16), (17) с условием (19), находим $\theta_\varepsilon,\vartheta_\varepsilon$. По формуле (23) находим $f_\varepsilon^{n+1}(t)$.

3. Проверяем условие $\left|\frac{J_\varepsilon^{n+1}-J_\varepsilon^{n}}{J_\varepsilon^{n}}\right|<\varepsilon_J$. (25)

4. Если не выполняется условие на этапе 4, возвращаемся к 1-му этапу.

При выполнении условия на этапе 4 считаем интеграл $\int_0^T f_\varepsilon^{n+1}(t)dt$, который является оптимальным количеством закачиваемой воды для достижения желаемого гидродинамического состояния пласта на заданном промежутке времени.

Введем разностную сетку:

$$x_{i+1}=x_i+h_{xi},\ y_{j+1}=y_j+h_{yj},\ \bar h_{xi}=\frac{h_{xi-1}+h_{xi}}{2},\ \bar h_{yj}=\frac{h_{yj-1}+h_{yj}}{2},\ t^0=0,\ t^{n+1}=t^n+\Delta t^n.$$

Уравнения (20), (21) будем аппроксимировать следующим образом:

$$(\chi+\tau)_{i+1/2\,j}^{n+1}\frac{p_{\varepsilon\,i+1\,j}^{n+1}-p_{\varepsilon\,ij}^{n+1}}{\bar h_{xi}h_{xi}}-(\chi+\tau)_{i-1/2\,j}^{n+1}\frac{p_{\varepsilon\,ij}^{n+1}-p_{\varepsilon\,i-1\,j}^{n+1}}{\bar h_{xi}h_{xi-1}}+(\chi+\tau)_{ij+1/2}^{n+1}\frac{p_{\varepsilon\,ij+1}^{n+1}-p_{\varepsilon\,ij}^{n+1}}{\bar h_{yj}h_{yj}}-$$

$$-(\chi+\tau)^{n+1}_{ij-1/2}\frac{p^{n+1}_{\varepsilon ij}-p^{n+1}_{\varepsilon ij-1}}{\bar h_{yj}h_{yj-1}}+q^{n+1}_{i+1/2j}\frac{s^{n+1}_{\varepsilon i+1j}-s^{n+1}_{\varepsilon ij}}{\bar h_{xi}h_{xi}}-q^{n+1}_{i-1/2j}\frac{s^{n+1}_{\varepsilon ij}-s^{n+1}_{\varepsilon i-1j}}{\bar h_{xi}h_{xi-1}}+$$

$$+q^{n+1}_{ij+1/2}\frac{s^{n+1}_{\varepsilon ij+1}-s^{n+1}_{\varepsilon ij}}{\bar h_{yj}h_{yj}}-q^{n+1}_{ij-1/2}\frac{s^{n+1}_{\varepsilon ij}-s^{n+1}_{\varepsilon ij-1}}{\bar h_{yj}h_{yj-1}}=-cf^{n+1}_{\varepsilon}\sum_{i=1}^{N_1}k_i\frac{b^H_{ij}}{\bar h_{xi}\bar h_{yj}}+c\sum_{i=1}^{N_2}(1+r^{n+1}_{\varepsilon})q^{n+1}_{\varepsilon}\frac{b^D_{ij}}{\bar h_{xi}\bar h_{yj}}, \qquad (26)$$

где

$$b^H_{ij}=\begin{cases}1, & \mathrm{i}=\mathrm{i}_{\text{н}},\ \mathrm{j}=\mathrm{j}_{\text{н}}\\ 0, & \mathrm{i}\neq\mathrm{i}_{\text{н}},\ \mathrm{j}\neq\mathrm{j}_{\text{н}}\end{cases},\qquad b^D_{ij}=\begin{cases}1, & \mathrm{i}=\mathrm{i}_{\text{д}},\ \mathrm{j}=\mathrm{j}_{\text{д}}\\ 0, & \mathrm{i}\neq\mathrm{i}_{\text{д}},\ \mathrm{j}\neq\mathrm{j}_{\text{д}}\end{cases};$$

$$m\frac{s^{n+1}_{\varepsilon ij}-s^{n}_{\varepsilon ij}}{\Delta t^n}+M^{n+1}_{i+1j}\left(-\frac{p^{n+1}_{\varepsilon i+1j}-p^{n+1}_{\varepsilon ij}}{\bar h_{xi}h_{xi}}\right)+M^{n+1}_{ij}\left(\frac{p^{n+1}_{\varepsilon ij}-p^{n+1}_{\varepsilon i-1j}}{\bar h_{xi}h_{xi-1}}\right)+$$

$$+M^{n+1}_{ij+1}\left(-\frac{p^{n+1}_{\varepsilon ij+1}-p^{n+1}_{\varepsilon ij}}{\bar h_{yj}h_{yj}}\right)+M^{n+1}_{ij}\left(\frac{p^{n+1}_{\varepsilon ij}-p^{n+1}_{\varepsilon ij-1}}{\bar h_{yj}h_{yj-1}}\right)+$$

$$+q^{n+1}_{i+1/2j}\frac{s^{n+1}_{\varepsilon i+1j}-s^{n+1}_{\varepsilon ij}}{\bar h_{xi}h_{xi}}+q^{n+1}_{i-1/2j}\frac{s^{n+1}_{\varepsilon ij}-s^{n+1}_{\varepsilon i-1j}}{\bar h_{xi}h_{xi-1}}-q^{n+1}_{ij+1/2}\frac{s^{n+1}_{\varepsilon ij+1}-s^{n+1}_{\varepsilon ij}}{\bar h_{yj}h_{yj}}+q^{n+1}_{ij-1/2}\frac{s^{n+1}_{\varepsilon ij}-s^{n+1}_{\varepsilon ij-1}}{\bar h_{yj}h_{yj-1}}=$$

$$=cf^{n+1}_{\varepsilon}\sum_{i=1}^{N_1}k_i\frac{b^H_{ij}}{\bar h_{xi}\bar h_{yj}}-c\sum_{i=1}^{N_2}r^{n+1}_{\varepsilon}q^{n+1}_{\varepsilon i}\frac{b^D_{ij}}{\bar h_{xi}\bar h_{yj}}; \qquad (27)$$

$$M^{n+1}_{i+1j}=\begin{cases}\chi^{n+1}_{ij+1}, & -\frac{p^{n+1}_{\varepsilon i+1j}-p^{n+1}_{\varepsilon ij}}{\bar h_{xi}h_{xi}}\le 0\\ \chi^{n+1}_{ij}, & -\frac{p^{n+1}_{\varepsilon i+1j}-p^{n+1}_{\varepsilon ij}}{\bar h_{xi}h_{xi}}>0\end{cases},\qquad M^{n+1}_{ij+1}=\begin{cases}\chi^{n+1}_{ij+1}, & -\frac{p^{n+1}_{\varepsilon ij+1}-p^{n+1}_{\varepsilon ij}}{\bar h_{yj}h_{yj}}\le 0\\ \chi^{n+1}_{ij}, & -\frac{p^{n+1}_{\varepsilon ij+1}-p^{n+1}_{\varepsilon ij}}{\bar h_{yj}h_{yj}}>0.\end{cases};$$

Аналогично поступаем для других случаев.

Уравнения (26), (27) являются нелинейными. Для нахождения p_{ε} в уравнении (26) используем итерационный метод переменных направлений со вторым порядком точности [11]. После вычисления p_{ε} из уравнения (27) находим s_{ε}. Для нахождения s_{ε} используем итерационную схему с направленными разностями первого порядка точности [12]. Используя найденные значения $p_{\varepsilon}, s_{\varepsilon}$ из уравнений (16), (17), находим сопряженные состояния $\theta_{\varepsilon}, \vartheta_{\varepsilon}$. Уравнения (16), (17) решаются вышеизложенными итерационными методами. Коэффициенты α^n, β^n для построения минимизирующихся последовательностей находятся одним из методов, приведенных в [10].

References

1. *Aziz Kh., Settari E.* Mathematical modeling of stratum systems. — M.: Nedra, 1982. — 407 p.
2. *Zhumagulov B.T., Monahov V.N., Smagulov Sh.S.* Computer modeling in oil extraction processes. — Almaty: SRC «Gylym», 2002. — 307 p.
3. *Kazakevich G.I., Klochkova L.V. and etc.* Processes of hydrocarbons migration in real geological regions // Mathematical modeling. —T. 10. — № 6. — 1998. — P.20—30.
4. *Noskov M.D., Istomin A.D.* Stochastical and deterministic modeling of no steady displacement of unmixed fluids // Mathematical modeling. —T. 11. — №10. — 1999. — P.77—85.
5. *Domanski A.V., Penkovski V.I.* Twophase filtration in mixed and moistened porous mediums // Applied mechanics and technical physics. — № 3. — 1988. — P.123—129.
6. *Pergament A.Kh., Popov S.B.* Two-dimensional problems of two-phase fluid // Mathematical modeling. —T. 10. — №2. — 1998. — P.48—70.
7. *Mukimbekov M.Zh.* Modeling of deposit development by secondary methods // Vestnik KazNU named after al-Farabi, series of mathematics, mechanics, informatics. — №1(40). — 2004.— P.140—146.
8. *Mukimbekov M.Zh.* About one two-dimensional problem in hydrocarbons development processes // Investigations on integral-differential equations. Part 39. — 2008. — P.217—226.
9. *Lions J.L.* Control on singular distributed systems. — M.: Science, 1987. — 368 p.

10. *Vasileyv F.P.* Numerical methods of extremal problems decision. — M.: Science, 1980. — 520 p.
11. *Samarskii A.A.* Theory of difference schemes. — M.: Science, 1989. — 616 p.
12. *Anderson D., Tannehill J.* Computational hydromechanics and heat exchange. — M.: World, 1990. — 384 p.

УДК 517. 956.32

О существовании и дифференциальных свойствах решений одного класса сингулярных дифференциальных уравнений смешанного типа

About existence and differential characteristics of the decisions of one class singular differential equations of the mixed type

Муратбеков М.Б., Мусилимов Б.М., Игисинов С.Ж.

Таразский институт Международного казахско-турецкого университета им. А. Ясауи (e-mail: iqisinovsabit@mail.ru)

Коэффициенттері өспелі аралас типті сингулярлы теңдеулер класы қарастырылды. Шешімнің бар болуы және жалғыздығы зерттелді. Шешімді құру әдісі көрсетілді. Коэффициенттерге қойылған кейбір шектеулермен шешімнің Соболев кеңістігіндегі коэрцитивті бағалары алынды.

The class of singular equation of mixed type with increasing coefficient is considered.The existence and singleness of solving is investigated. The method of construction of solving is expounded. In some restriction to coefficient the coercitive marks of solving in the space of Sobolev are received.

Введение и формулировка результатов

Пусть $\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, -1 < y < 1\}$. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(x)u_x + c(x)u, \quad u(x, y) \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами, где $k(y)$ – непрерывная функция на [-1,1] и $yk(y) > 0, k(0) = 0$, $C_0^\infty(\Omega)$ – множество, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций и удовлетворяющее условиям $u(x,0) = u(x,1) = 0$, финитных по переменной x.

В случае неограниченной области задача о разрешимости и гладкости решений уравнений смешанного типа, оценки их решений в различных пространствах изучены в работах [1–5].

Обозначим через $K(\tau, b)$ класс коэффициентов, удовлетворяющих следующим условиям:

i) $|a(x)| \ge \delta_0 > 0,\ c(x) \ge \delta > 0$ — непрерывные функции в R ($R = (-\infty, +\infty)$);

ii) $c_0 c(x) \le a^2(x) \le c_1 c(x)$, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ — постоянные числа;

iii) $|a(x) - a(t)|^2 + |c(x) - c(t)| \le \tau c(t)$

для всех $x, t \in R$ таких, что $|x - t| \le bd(t)$, $d(t) = \dfrac{1}{[c(t)]^{\frac{1}{2}}}$, $\tau > 0$, $b > 0$.

Теорема 1. Пусть $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$. Тогда найдутся числа τ_0 и b_0 такие, что, если $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$ при некоторых $\tau \in (0, \tau_0)$ и $b > b_0$, и замыкание L оператора $L_0 u = u_{xx} - u_{yy} + a(x)u_x + c(x)u$, $D(L_0) = C_0^\infty(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ существует.

Теорема 2. Пусть $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$. Тогда найдутся числа τ_0 и b_0 такие, что, если $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$ при некоторых $\tau \in (0, \tau_0)$ и $b > b_0$, и оператор L имеет непрерывный обратный оператор.