

А.В.Зенков

Алтайский государственный аграрный университет, Барнаул, Россия
(E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com)

О многообразиях m -групп с тождеством $X_*^n = X^{-n}$

Напомним, что m -группа представляет собой пару (G) , где G -группа и является убыванием двух автоморфизмов группы G . Данную m -группу можно рассматривать как алгебраическую систему сигнатуры, и это очевидно, что m -группы образуют многообразие в этой подписи. Множеством M сортов всех m -групп является частично упорядоченным множеством по отношению к теоретико-множественным включениям. Кроме того, M является решеткой по отношению к естественно определяемым операциям пересечения и объединения разновидностей m -групп. Автором изучено многообразие, которое определяется тождеством $X_*^n = X^{-n}$.

Ключевые слова: m -группа, многообразие, решетка, антиизоморфизм решетки.

1. Введение

Исследование групп монотонных преобразований линейно упорядоченных множеств и связанных с ними упорядочений на группах имеет богатую историю. Значительный сдвиг в изучении таких групп произошел после работы М. Giraudet и F. Lucas [1], в которой установлена связь между полуупорядоченными группами и группами монотонных подстановок и связанными с ними решеточно упорядоченными группами. Предложенная концепция оказалась особенно продуктивной за счет расширения сигнатуры решеточно упорядоченных групп и введения новой универсальной алгебры — m -группы. Определение и основные свойства многообразий m -групп и их связь с теорией многообразий решеточно упорядоченных групп установлены М. Giraudet, J. Rachunek [2]. Большое количество вопросов возникло о строении и свойствах таких групп. Многие из них решены, но значительное число проблем, главным образом связанных с особенностями дополнительной операции m -группы, остаются открытыми.

Напомним основные понятия теории решеточно упорядоченных групп и групп монотонных подстановок. Решеточно упорядоченной группой (l -группой) называется алгебраическая система G сигнатуры $\ell = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, \rangle$, совмещающая в себе согласованные структуры группы и решетки, т.е. для любых $x, y, u, v \in G$ имеет место $u(x \wedge y)v = uxv \wedge uvv, u(x \vee y)v = uxv \vee uvv$.

Под m -группой будем понимать алгебраическую систему G сигнатуры $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, * \rangle$, где $\langle G, \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge \rangle$ является решеточно упорядоченной группой (l -группой) и одноместная операция $*$ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т.е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения

$$(xy)_* = x_*y_*, \quad (x_*)_* = x, \quad (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, \quad (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*.$$

В дальнейшем m -группу G с фиксированным автоморфизмом $*$ записываем как пару $(G, *)$.

Класс M всех m -групп образует многообразие сигнатуры M . Множество всех многообразий m -групп M является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения. Более того, M есть решетка относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий m -групп.

Пусть Ω – некоторое линейно упорядоченное множество. Через $\text{Aut}(\Omega)$ и $\text{Mon}(\Omega)$ обозначим группы (относительно суперпозиции) всех монотонно возрастающих и монотонных подстановок линейно упорядоченного множества Ω соответственно. Очевидно, что $\text{Aut}(\Omega) \subseteq \text{Mon}(\Omega)$. Пусть $a \in \text{Mon}(\Omega) \setminus \text{Aut}(\Omega)$ и $a^2 = e$. Тогда будем называть a реверсивным автоморфизмом 2-го порядка Ω . Следуя [2], будем говорить, что m -группа $(G, *)$ представима порядковыми подстановками ли-

нейно упорядоченного множества Ω , если $G \subseteq \text{Aut}(\Omega)$ и $g_* = aga$ для любого $g \in G$, где a – реверсивный автоморфизм 2-го порядка Ω . Этот факт записываем в виде (G, Ω, a) .

Отметим, что множество Ω представимо в виде $\Omega = L\bar{U}\{0\}^\varepsilon\bar{U}R$, где $L = \{\omega \in \Omega : (\omega)a > \omega\}$, $R = \{\omega \in \Omega : (\omega)a < \omega\}$, o — точка Ω , неподвижная относительно действия автоморфизма a . Множество Ω может не содержать неподвижной точки и тогда $\varepsilon = 0$, если же такая точка есть, то $\varepsilon = 1$. Приведем некоторые примеры представлений.

Пример (с неподвижной точкой). Пусть $\Omega = \mathbb{R}$ – естественно линейно упорядоченное множество действительных чисел. Определим $(x)a = -x + 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Тогда правое регулярное представление $(\text{Aut}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, a)$ есть пример представления с неподвижной точкой ($o=1$).

Пример (без неподвижной точки). Пусть $\Omega = \mathbb{R}$ – естественно линейно упорядоченное множество действительных чисел. Определим $(x)a = -x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Тогда правое регулярное представление $(\text{Aut}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, a)$ есть пример представления без неподвижной точки.

Пример (собственного представления с неподвижной точкой). Группа (относительно суперпозиции) всех непрерывных монотонно возрастающих функций действительной прямой, проходящих через начало координат — точку O , представляет такой пример, если реверсивный автоморфизм a определен правилом $(x)a = -x$.

Рассмотренные выше примеры есть примеры m -транзитивных представлений, т.е. для любых $\alpha, \beta \in \Omega$ найдется $x \in G_*$, что $(\alpha)x = \beta$, где $G_* = gr(G, a) \subseteq \text{Mon}(\Omega)$. Эти представления, как и в случае l -групп, играют особую роль при изучении многообразий m -групп. Из общей теории алгебраических систем известно, что всякое многообразие определяется своими подпрямо неразложимыми группами, которые, в свою очередь, допускают такие представления.

Для m -групп имеет место теорема, доказанная M.Giraudet и F.Lucas [1].

Теорема 1.1. Всякая m -группа $(G, *)$ имеет точное представление порядковыми подстановками некоторого линейно упорядоченного множества Ω .

2. Основной результат

Через I обозначим многообразие m -групп, определяемое тождеством $x_* = x^{-1}$, которое является наименьшим нетривиальным элементом M . Для каждого натурального n определим многообразие m -групп $I^n = I \cdot \dots \cdot I$. M.Giraudet и J.Rachunek [2], в частности, показали, что I^n определяется тождеством $x_*^{-2^{n-1}} = x^{-2^{n-1}}$. Мы показываем, что других многообразий, определяемых подобными тождествами, нет. Более точно, если $n = 2^m(2s+1)$, $m \geq 0, s > 0$, то тождество $x_*^n = x^{-n}$ влечет $x_*^n = x^{-1}$.

Рассмотрим группу $S_2 = \langle a_0, a_1, b \mid [a_0, a_1] = e, a_0^b = a_1, a_1^b = a_0 \rangle$. Если $g \in S_2$, то g представим, причем единственным способом, в виде $g = b^k a_0^m a_1^n$, $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Относительно лексикографического порядка, т.е. $g \geq e \Leftrightarrow k > 0$ или $k = 0, m \geq 0, n \geq 0$, группа S_2 будет решеточно упорядоченной. Определим отображение $\phi: S_2 \rightarrow S_2$ по правилу: $(g)\phi = b^{-k} a_0^{-m} a_1^{-n}$. Тогда (S_2, ϕ) будет m -группой. Через S обозначим многообразие m -групп, порожденное (S_2, ϕ) . Авторами [3, 4] показано, что многообразие S является единственным неабелевым накрытием многообразия m -групп I .

Несложно заметить, что $M \subseteq S \subseteq I^2 S \subseteq I^2$. В данной работе показано, что эти многообразия различны. При доказательстве этого результата использована техника подстановочного сплетения представлений m -групп, развитая автором [5]. Отметим, что для сплетений m -групп имеет место аналог теоремы Калужнина-Краснера, что позволяет активно использовать сплетения при изучении многообразий m -групп.

3. О строении решетки M

Тривиальное многообразие m -групп E является наименьшим элементом M . Будем говорить, что многообразие m -групп X является *накрытием* многообразия m -групп Y (X покрывает Y), если и для любого многообразия m -групп Z такого, что $Y \subseteq Z \subseteq X$, выполнено $Z = Y$, либо $Z = X$.

Теорема 3.1 [2].

- 1) Многообразие m -групп I является накрытием E ;
- 2) многообразие всех абелевых m -групп A покрывает I .

Пусть p — произвольное простое число. Рассмотрим группу

$$S_p = \langle a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, b \mid [a_i, a_j] = e, a_i^b = a_{i+1}, a_{p-1}^b = a_0 \rangle.$$

Относительно лексикографического порядка группа S_p является решеточно упорядоченной. На порождающих элементах определим отображение $\varphi_p: (a_i) \varphi_p = a_k^{-1}, k \equiv p - (i + 1) \pmod{p}, (b) \varphi_p = b^{-1}$. Прямая проверка показывает, что φ_p есть автоморфизм второго порядка группы S_p и антиизоморфизм решетки S_p , т. е. для каждого p пара (S_p, φ_p) будет m -группой.

Теорема 3.2 [6].

Пусть S_p — многообразие m -групп, порожденное (S_p, φ_p) . Тогда:

- 1) S_p — накрытие многообразия всех абелевых m -групп A для каждого p ;
- 2) $S_p \neq S_q$ при $p \neq q$.

М.Е.Huss, N.R.Reily [7] на решетке многообразий l -групп L определили автоморфизм второго порядка φ . Напомним определение этого автоморфизма. Рассмотрим произвольную l -группу (G, \leq) . Через G^* обозначим l -группу, полученную из исходной группы путем обращения порядка. Далее, если $V = \{G_i \mid i \in I\}$ — некоторое многообразие l -групп, то тогда $\varphi(V) = \{G_i^* \mid i \in I\}$. Если верно равенство $\varphi(V) = V$, то тогда многообразие V называется *реверсивным*. Несложно показать, что система тождеств (сигнатуры l), определяющая реверсивное многообразие, задает некоторое многообразие m -групп.

В теории многообразий l -групп важную роль играет многообразие l -групп N с субнормальными скачками. Как показал W.Ch.Holland [8], это многообразие замечательно тем, что оно является наибольшим нетривиальным элементом решетки многообразий l -групп L . Известно [6], что многообразие N реверсивно. Таким образом, тождество

$$(x \vee e)^{-1}(y \vee e)^{-1}(x \vee e)^2(y \vee e)^2 \wedge e = e$$

определяет многообразие m -групп N_m с субнормальными скачками. Верна следующая

Теорема 3.3 [9]. Многообразие m -групп N_m с субнормальными скачками является наибольшим нетривиальным элементом решетки многообразий m -групп M .

Известно (см., например, [6]), что многообразие всех o -аппроксимируемых l -групп R реверсивно. Следовательно, тождество $(y^{-1} \cdot x^{-1} \cdot y \wedge x) \vee e = e$, определяющее R , задает и многообразие R_m всех o -аппроксимируемых m -групп. Через M_{R_m} обозначим решетку o -аппроксимируемых многообразий m -групп.

Теорема 3.4 [3].

- 1) В решетке M_{R_m} имеется континуум многообразий, каждое из которых в ней имеет континуум накрытий;
- 2) существует o -аппроксимируемое многообразие m -групп, которое не имеет накрытий в решетке M_{R_m} ;
- 3) существует o -аппроксимируемое многообразие m -групп без независимого базиса тождеств.

Список литературы

- 1 Giraudet M., Rachunek J. Varieties of half lattice — ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech.Math. Journal 1999. — Vol. 49, No. 124. — P.743–766.
- 2 Giraudet M., Lucas F. Groupes a' motie' ordonne's // Fundam. Math. — 139. — 1991. — No. 2. — P.75–89.
- 3 Zenkov A.V. Covers in the lattice of varieties of m - groups // Siberian Mathematical Journal. — 2006. — Vol. 47. — No. 1. — P. 58–63.
- 4 Zenkov A.V. The minimal varieties of m -groups // Siberian Mathematical Journal. — 2009. — Vol. 50. — No. 6. — P. 1035–1038.
- 5 Zenkov A.V. Wreath product of the groups of monotone permutations // Siberian Mathematical Journal. — 2011. — Vol. 52. — No. 1. — P. 58–63.
- 6 Isaeva O.V. Covers in the lattice of varieties of m -groups // Algebra and Model theory. — 2003. — 4. — P.35–43.

- 7 Huss M.E., Reily N.R. On reversing the order of lattice-ordered group // *Journal Algebra*. — 1984. — Vol. 91. — P. 176–191.
 8 Holland W.Ch. The largest proper variety of lattice-ordered groups // *Proc.Am.Math.Soc.* — 1976. — Vol. 57. — No. 1. — P. 25–28.
 9 Kopytov V.M., Rachunek J. The largest proper variety of m -groups // *Algebra and logic*. — 2003. — Vol. 42. — No. 5. — P. 624–635.

А.В.Зенков

$X_*^n = X^{-n}$ теңбе-теңдікті m -группалы көпбейнеліктер жайында

Мақалада m -группа өзімен (G) жұбын қарастыратынын еске түсірейік, мұндағы G -группа және G группасындағы екі автоморфизмді азайту болып табылады. Бұл m -группасын алгебралық жүйенің сигнатурасы ретінде қарастыруға болады және m -группасы осы жазуда әр түрлілік құрайды. Барлық m -группалар сортының M жиыны теориялық жиындыққа қатысты жартылай реттелген жиын болады. Сонымен қатар M m -группалар әр түрлілігінің анықталған амалдар бойынша, яғни бірігу және қиылысуға қатысты, тор болады. Автор әр түрлілікті қарастырып, мұндағы $X_*^n = X^{-n}$, M құрылымы туралы кейбір нәтижелер шығарады.

A.V.Zenkov

On varieties of m -groups with identity $X_*^n = X^{-n}$

Recall that an m -group is a pair (G, \ast) , where G is an l -group and \ast is a decreasing order two automorphism of G . An m -group can be regarded as an algebraic system of signature $m = \langle \cdot, e^{-1}, \vee, \wedge, \ast \rangle$ and it is obvious that the m -groups form a variety in this signature. The set M of varieties of all m -groups is a partially ordered set with respect to the set-theoretic inclusion. Moreover, M is a lattice with respect to the naturally defined operations of intersection and union of varieties of m -groups. We study the varieties which is defined by the identity $X_*^n = X^{-n}$. We deduce some results on the structure of M .

References

- 1 Giraudet M., Rachunek J. *Czech. Math. Journal*, 1999, 49, 124, p.743–766.
- 2 Giraudet M., Lucas F. *Fundam. Math. Journal*, 1991, 139, 2, p.75–89.
- 3 Zenkov A.V. *Siberian Mathematical Journal*, 2006, 47, 1, p. 58–63.
- 4 Zenkov A.V. *Siberian Mathematical Journal*, 2009, 50, 6, p. 1035–1038.
- 5 Zenkov A.V. *Siberian Mathematical Journal*, 2011, 52, 1, p. 58–63.
- 6 Isaeva O.V. *Algebra and Model theory*, 2003, 4, p. 35–43.
- 7 Huss M.E., Reily N.R. *Journal Algebra*, 1984, 91, p. 176–191.
- 8 Holland W.Ch. *Proc.Am.Math.Soc.*, 1976, 57, 1, p. 25–28.
- 9 Kopytov V.M., Rachunek J. *Algebra and logic*, 2003, 42, 5, p. 624–635.