3 *Microsoft Corporation network Administration on the basis of Microsoft Windows 2000*. Training course of MCSA/MCSE:PER. about English 3rd prod. corrected, Moscow: Izd.-torg. house «Russkaya Redakciya», 2004, 416 p.

4 [ER]. Access mode: http://www.computerra.ru

УДК 512. 554:31

Ш.Ш.Ибраев

Университет «Болашак», Кызылорда (E-mail: ibrayevsh@mail.ru)

Об ограниченных локальных деформациях классических модулярных алгебр Ли

Обычные локальные деформации классических модулярных алгебр Ли исследованы полностью, кроме случаев, когда корни системы корней неоднородны по длине и характеристика поля $p = 2$. Ограниченные локальные деформации классических модулярных алгебр Ли еще не изучены. В данной статье вычислены ограниченные локальные деформации классических алгебр Ли с однородной системой корней над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$. Под классической алгеброй Ли над k мы будем понимать алгебру Ли простой алгебраческой группы либо ее фактор-алгебру по центру.

Ключевые слова: модулярная алгебра Ли, алгебраическая группа, вторая когомология, ограниченная деформация, локальная деформация.

В теории когомологии простых алгебраических групп над полем положительной характеристики наряду с обычными когомологиями их ограниченных алгебр Ли также важную роль играют их ограниченные когомологии для ограниченных модулей, введенные Хохшильдом в 1954 г. [1]. В частности, существенно и знание структуры их ограниченных локальных деформаций, так как ограниченные локальные деформации интерпретируются как вторые когомологии присоединенных модулей.

Пусть g — классическая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$. Следующие классические алгебры Ли над k имеют ненулевые центры: $A_n, n+1 \equiv 0 \pmod p$; B_n, C_n, D_n, E_7 при $p = 2$; E_6 при $p = 3$. Их строения приведены ниже в таблице 1 [2, 3]. Для обозначения типов соответствующих фактор-алгебр Ли по центру мы используем обозначения $\bar{A}_n$, $\bar{B}_n$, $\bar{C}_n$, $\bar{D}_n$, $\bar{E}_6$, $\bar{E}_7$.

Таблица 1

Центры классических алгебр Ли в положительной характеристике

Тип R	p	$\dim C_g$	Базис C_g
$A_n, n+1 \equiv 0 \pmod 2$	2	1	$h_1 + h_3 + \cdots + h_{n-2} + h_n$
A_{lp-1},	$p > 2$	1	$\sum_{i=1}^{lp-1} ih_i$
B_n	2	1	h_n
C_n	2	1	$h_1 + h_3 + h_5 + \cdots + h_{2k-1}$
$D_n, n \equiv 0 \pmod 2$	2	2	$h_1 + h_3 + \cdots + h_{n-1}$, $h_{n-1} + h_n$
$D_n, n \equiv 1 \pmod 2$	2	1	$h_{n-1} + h_n$
E_6	3	1	$h_1 - h_3 + h_5 - h_6$
E_7	2	1	$h_2 + h_5 + h_7$

Согласно теории деформации [4] ограниченные локальные деформации ограниченной алгебры Ли g параметризуются второй группой ограниченной когомологии $H^2_*(g,g)$ алгебры Ли g с коэффициентами в присоединенном модуле. Известно, что при $p>3$ все классические ограниченные алгебры Ли являются жесткими [5]. Поэтому обычная вторая группа когомологии $H^2(g,g)$ тривиальна для всех классических ограниченных алгебр Ли, если $p>3$. В характеристике $p=3$ среди классических модулярных алгебр Ли единственная алгебра Ли — типа B_2 допускает нетривиальную деформацию [6]. В случае характеристики 2 нежесткие классические алгебры Ли найдены в [7]. Если g — алгебра Ли типа B_2 и $p=3$, то согласно точной последовательности Хохшильда [1] $H^2_*(g,g)\cong H^2(g,g)$, т.е. все локальные деформации данной простой алгебры Ли имеют ограниченную структуру. Локальные деформации, не имеющие ограниченную структуру, встречаются среди ограниченных алгебр Ли картановского типа [8]. Для классических модулярных алгебр Ли этот вопрос представляет интерес только для перечисленных выше алгебр Ли. В данной работе изучаются ограниченные локальные деформации классических модулярных алгебр Ли с однородной системой корней. К ним относятся алгебры Ли A_n $(n+1\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p))$; D_n, E_6, E_7, E_8, $\overline{A}_n$ $(n+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, p))$, $\overline{D}_n$ $(p=2)$, $\overline{E}_6$ $(p=3)$, $\overline{E}_7$ $(p=2)$.

Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть g — классическая алгебра Ли с однородной системой корней над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p>0$. Тогда $H^2_*(g,g)=0$, кроме следующих случаев:

(a) $H^2_*(g,g)^{(-1)}\cong H^0(\lambda_1)$, если g имеет тип A_1 и $p=2$;

(b) $H^2_*(g,g)^{(-1)}\cong H^0(\lambda_1)\oplus H^0(\lambda_3)$, если g имеет тип $\overline{A}_3$ и $p=2$;

(c) $H^2_*(g,g)^{(-1)}\cong H^0(\lambda_3)$, если g имеет тип $\overline{A}_5$ и $p=2$;

(d) $H^2_*(g,g)^{(-1)}\cong H^0(\lambda_1+\lambda_n)\cong g^*$, если g имеет тип A_n и $n+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, p)$;

(e) $H^2_*(g,g)^{(-1)}\cong H^0(\lambda_1)\oplus H^0(\lambda_2)\oplus H^0(\lambda_2)\oplus H^0(\lambda_3)\oplus H^0(\lambda_4)$, если g имеет тип D_4 и $p=2$;

(f) $H^2_*(g,g)^{(-1)}\cong H^0(\lambda_5)\oplus H^0(\lambda_6)$, если g имеет тип $\overline{D}_6$ и $p=2$;

(g) $H^2_*(g,g)^{(-1)}\cong H^0(\lambda_1)\oplus H^0(\lambda_2)\oplus H^0(\lambda_2)$, если g имеет тип D_n $(n=2k, k>2)$ и $p=2$;

(h) $H^2_*(g,g)^{(-1)}\cong H^0(\lambda_2)\cong g^*$, если g имеет тип D_n $(n=2k+1, k>1)$ и $p=2$;

(j) $H^2_*(g,g)^{(-1)}\cong H^0(\lambda_2)\cong g^*$, если g имеет тип E_6 и $p=3$;

(k) $H^2_*(g,g)^{(-1)}\cong H^0(\lambda_1)\cong g^*$, если g имеет тип E_7 и $p=2$;

(l) $H^2_*(g,g)^{(-1)}\cong H^0(\lambda_7)$, если g имеет тип $\overline{E}_7$ и $p=2$.

Доказательство. Для присоединенного g-модуля g справедлива следующая точная когомологическая последовательность G-модулей [9]:

$$H^1(G_1,g)^{(-1)}\to H^1(g,g)^{(-1)}\xrightarrow{T} H^0(g,g)^{(-1)}\otimes g^*\to H^2(G_1,g)^{(-1)}\to H^2(g,g)^{(-1)}\xrightarrow{D} H^1(g,g)^{(-1)}\otimes g^*.$$

Так как $H^2(G_1,g)^{(-1)}\cong H^2_*(g,g)^{(-1)}$ и для алгебр Ли с ненулевым центром $H^0(g,g)^{(-1)}\cong C_g$, то для рассматриваемых алгебр Ли, за исключением алгебры Ли типа A_1 $(p=2)$, имеет место точная последовательность

$$0\to C_g\otimes g^*\to H^2_*(g,g)^{(-1)}\to H^2(g,g)^{(-1)}\xrightarrow{D} H^1(g,g)^{(-1)}\otimes g^*. \tag{1}$$

Если алгебра Ли g простая, то $C_g=0$ и $H^1(g,g)^{(-1)}=0$. Тогда из последней точной последовательности следует, что

$$H^2_*(g,g)^{(-1)}\cong H^2(g,g)^{(-1)}. \tag{2}$$

Согласно таблице 1 для алгебр Ли с ненулевым центром

$$C_g=\begin{cases} k\oplus k \text{ в случаях } (e),(g);\\ k \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

тогда

$$C_g \otimes g^* = \begin{cases} g^* \oplus g^* \text{ в случаях } (e), (g); \\ g^* \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3}$$

Согласно основному результату работы [6]

$$H^2(g,g)^{(-1)} \cong \begin{cases} H^0(\lambda_1) \oplus H^0(\lambda_2) \oplus H^0(\lambda_2) \oplus H^0(\lambda_3) \text{ в случае } (b); \\ H^0(\lambda_3) \text{ в случае } (c); \\ H^0(\lambda_1) \oplus H^0(\lambda_3) \oplus H^0(\lambda_4) \text{ в случае } (e); \\ H^0(\lambda_5) \oplus H^0(\lambda_6) \text{ в случае } (f); \\ H^0(\lambda_1) \text{ в случаях } (g), (i); \\ H^0(\lambda_7) \text{ в случае } (l); \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4}$$

Если g имеет тип A_1 и $p=2$ (случай (*a*)), то, выполнив дополнительные вычисления, получим:

$$H^2(g,g)^{(-1)} = H^0(\lambda_1) \oplus g^*. \tag{5}$$

В характеристике 2 внешние дифференцирования вычислены в работе [10]. Дополнив его результаты для $p>2$, получим:

$$H^1(g,g)^{(-1)} \cong \begin{cases} H^0(\lambda_1) \oplus k \oplus k \text{ в случае } (a); \\ H^0(\lambda_2) \oplus k \text{ в случае } (b); \\ H^0(\lambda_1) \oplus k \oplus k \text{ в случае } (f); \\ H^0(\lambda_1) \oplus k, \text{ если } g \text{ имеет тип } D_n \ (n=2k+1,\ k>1) \text{ и } p=2, \\ k \oplus k \text{ в случаях } (e), (g), (e); \\ k \text{ в случаях } (c), (d), (h), (j), (k), (l); \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, все утверждения теоремы 1, кроме случаев *(a), (b)* и случая алгебр Ли D_n $(n=2k+1, k>1, p=2)$, следуют из точности последовательностей (1) и формул (2)–(6).

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

Случай (a). Пусть $\{e,h,f\}$ — стандартный базис алгебры Ли g, тогда $[e,h]=2e, [e,f]=h,$ $[h,f]=-2f$. Обычный i-мерный коцепной комплекс алгебры Ли g с коэффициентами в присоединенном модуле определяется равенством $C^i(g,g)=\{f:\Lambda^i(g)\to g\}$, а дифференциал $d_i : C^i(g,g)\to C^{i+1}(g,g)$ — равенством

$$d_i f(x_1,\cdots,x_{i+1}) = \sum_{j=1}^{i+1}(-1)^j [x_j, f(x_1,\cdots,\hat{x}_j,\cdots x_{i+1})] + \sum_{p<q}(-1)^{p+q} f([x_p,x_q],x_1,\cdots,\hat{x}_p,\cdots,\hat{x}_q,\cdots,x_{i+1}),$$

где $x_1,\cdots,x_{i+1}\in g$ и знак $\wedge$ над элементом алгебры Ли g означает, что соответствующий элемент должен быть опущен. Пусть $Z^i(g,g)=Ker\, d_i$ — пространство i-мерных коциклов и $B^i(g,g)=\operatorname{Im} d_{i-1}$. По определению $H^i(g,g)=Z^i(g,g)/B^i(g,g)$.

Пусть $\omega\in Z^1(g,g)$ и $\psi\in Z^2(g,g)$, тогда

$$-\omega([x,y])+[x,\omega(y)]-[y,\omega(x)]=0, \tag{7}$$

$$-\psi([x,y],z)+\psi([x,z],y)-\psi([y,z],x)+[x,\psi(y,z)]-[y,\psi(x,z)]+[z,\psi(x,y)]=0, \tag{8}$$

где $x,y,z\in g$.

В сопряженном пространстве g^* выберем сопряженный базис $\{e^*, h^*, f^*\}$ и отождествим пространства $C^i(g,g)$ пространством $\Lambda^i(g^*)\otimes g$. Когомологический класс коцикла $\alpha \in Z^i(g,g)$ обозначается через $[\alpha]$.

Вычислим пространства $H^2(g,g)$, используя условия коцикличности (7). Согласно (7)

$$Z^2(g,g)=\langle \psi_i : i=1,\cdots,7\rangle_g, \text{ где } \psi_2 = e^*\wedge h^*\otimes h,\ \psi_3 = e^*\wedge f^*\otimes f,\ \psi_4 = h^*\wedge f^*\otimes e,\ \psi_5 = e^*\wedge f^*\otimes e;$$

$$\psi_6 = h^*\wedge f^*\otimes h \text{ и } \psi_5 = e^*\wedge f^*\otimes h.$$

Пусть $\psi = \sum_{j=1}^{7} a_j\psi_j \in Z^2(g,g)$ и

$$\omega = x_1e^*\otimes e + x_2e^*\otimes h + x_3e^*\otimes f + y_1h^*\otimes e + y_2h^*\otimes h + y_3h^*\otimes f +$$
$$+ z_1f^*\otimes e + z_2f^*\otimes h + x_3f^*\otimes f \in C^1(g,g), \tag{9}$$

где $a_j, x_j, y_j, z_j \in Z_2$.

Тогда из условия $d\omega = \psi$ следует, что $a_1 = a_4 = 0$, $a_2 = y_3$, $a_3 = y_3$, $a_5 = y_1$, $a_6 = y_1$, $a_7 = x_1 + y_2 + z_3$. Следовательно, коциклы $\psi_1, \psi_2+\psi_3, \psi_4, \psi_5+\psi_6$ линейно независимы и составляют базис пространства $H^2(g,g)$. Таким образом, $H^2(g,g)^{(-1)} \cong H^0(\lambda_1)\oplus H^0(\lambda_1)$.

Условие коцикличности (8) для коцепи (9) дает следующие уравнения относительно $x_j, y_j, z_j \in Z_2$: $y_1 = y_3 = 0$, $x_1 + y_2 + z_3 = 0$. Решив эти уравнения как линейную систему, получим следующие коциклы: $\omega_1 = e^*\otimes e + h^*\otimes h$, $\omega_2 = e^*\otimes f$, $\omega_3 = f^*\otimes e$, $\omega_4 = f^*\otimes f + h^*\otimes h$, $\omega_5 = e^*\otimes h$, $\omega_6 = f^*\otimes h$. Они составляют базис пространства $Z^1(g,g)$.

Пусть $\varpi = \sum_{j=1}^{6} b_j\omega_j \in Z^1(g,g)$, где $b_j \in Z_2$, тогда из равенств

$$\varpi(e) = [e, c_1e + c_2h + c_3f],\ \varpi(h) = [h, c_1e + c_2h + c_3f],\ \varpi(f) = [f, c_1e + c_2h + c_3f],$$

где $c_1e + c_2h + c_3f \in\ \in C^0(g,g) = g$, $c_i \in Z_2$, следует, что $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$, $b_5 = c_3$, $b_6 = c_1$. Тогда коциклы $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ линейно независимы, и их классы составляют базис пространства $Z^1(g,g)$.

$D : H^2(g,g)^{(-1)} \to H^1(g,g)^{(-1)}\otimes g^*$ точной последовательности (1) определяется формулой [1]

$$D_\psi(x)\cdot y = \sum_{j=0}^{p-1}[x^j, \psi(x,(ad\ x)^{p-1-j}(y))] - \psi(x^{[p]}, y). \tag{10}$$

Легко заметить, что $D_{\psi_2+\psi_3}(h) = \omega_5$, $D_{\psi_5+\psi_6}(h) = \omega_6$, $D_{\psi_1}(h) = \omega_2$ и $D_{\psi_4}(h) = \omega_3$. Так как ω_5 и ω_6 — внутренние дифференцирования алгебры Ли g, а ω_5 и ω_6 — внешние дифференцирования, то $[\psi_2+\psi_3], [\psi_5+\psi_6] \in H^2_*(g,g)$ и $[\psi_1], [\psi_4] \notin H^2_*(g,g)$. Тогда из точности последовательности (1) следует, что $H^2_*(g,g) \cong H^0(\lambda_1)$.

Случай (b). Известно, что $H^1(G_1,k)^{(-1)} = 0$ и $H^2(G_1,k)^{(-1)} = g^*$. Так как $H^2(G_1, H^0(\lambda_1+\lambda_3))^{(-1)} = H^0(\lambda_1)\oplus H^0(\lambda_3)$ [10], то из длинной когомологической последовательности G_1-когомологии

$$\cdots \to H^1(G_1,k)^{(-1)} \to H^2(G_1,g)^{(-1)} \to H^2(G_1, H^0(\lambda_1+\lambda_2))^{(-1)} \to H^2(G_1,k)^{(-1)} \to \cdots$$

короткой точной последовательности G-модулей $0 \to g \to H^0(\lambda_1+\lambda_2) \to k \to 0$ следует, что

$$H^2(G_1,g)^{(-1)} = H^2_*(g,g)^{(-1)} = H^0(\lambda_1)\oplus H^0(\lambda_3).$$

Случай $\bar{D}_n$ $(n = 2k+1, k > 1, p = 2)$. Так как $H^2(G_1, H^0(\lambda_2))^{(-1)} = 0$, то из длинной когомологической последовательности G_1-когомологии короткой точной последовательности $0 \to g \to H^0(\lambda_2) \to k \to 0$ следует, что $H^2(G_1,g)^{(-1)} = H^2_*(g,g)^{(-1)} = 0$. Теорема 1 доказана.

В результате исследования были обнаружены некоторые интересные факты. Например, для некоторых классических алгебр Ли характеристики 2 (см. ниже утверждения (*e*) и (*g*) теоремы 1) обычная вторая группа когомологии $H^2(g,g)$ является собственной подгруппой второй группы ограниченной когомологии $H^2_*(g,g)$. В случаях (*c*), (*f*) и (*l*) обычные и ограниченные вторые группы когомологии совпадают, т.е. все локальные деформации допускают ограниченную структуру. В случаях (*a*) и (*b*) не все локальные деформации допускают ограниченную структуру, более того, в случае (*a*) группа когомологии $H^2(g,g)$ имеет собственную подгруппу, в которой представители каждого элемента не удовлетворяют условию коцикличности обычного стандартного коцепного комплекса, а в случае (*b*) такая подгруппа не обнаружена. Если g имеет тип $\overline{D}_n$ $(n=2k+1, k>1, p=2)$, то все локальные деформации не имеют ограниченную структуру.

Таким образом, в исследуемых алгебрах Ли реализованы все возможные варианты комбинации локальной ограниченной и локальной обычной деформации ограниченных алгебр Ли.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований университета «Болашак» по теме «Когомологии алгебр Ли и алгебраических групп» (номер госрегистрации 0113РК00624).

Список литературы

1 *Hochschild G.* Cohomology of restricted Lie algebras // Amer. J. Math. — 1954. — Vol. 76. — P. 555–580.

2 *Hogeweij G.M.D.* Almost classical Lie algebras: I, II // Indag. Math. — 1982. — Vol. 44. — P. 441–452, 453–460.

3 *Вейсфеллер Б.Ю., Кац В.Г.* Экспоненциалы в алгебрах Ли характеристики *p* // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1971. — Т. 35. — № 4. — P. 762–788.

4 *Gerstenhaber M.* On the deformation of rings and algebras // Ann. Math. — 1964. — Vol. 79. — P. 59–103.

5 *Рудаков А.Н.* Деформации простых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1971. — Т. 35. — № 5. — С. 1113–1119.

6 *Джумадильдаев А.С.* К деформациям классических простых алгебр Ли // УМН. — 1976. — Т. 31. — № 3. — С. 211, 212.

7 *Чебочко Н.Г.* Деформации классических алгебр Ли с однородной системой корней в характеристике два. I: Матем. сб. — 2005. — Т. 196. — № 9. — С. 125–156.

8 *Viviani F.* Restricted infinitesimal deformations of restricted simple Lie algebras // J. Algebra. Appl. — 2012. — Vol. 11. — № 5. — 19 p.

9 *Dzhumadil'daev A.S., Ibraev S.S.* Nonsplit extensions of classical Lie algebras of rank 2 // Homology, Homotopy and Applications. — 2002. — Vol. 4 (2). — P. 141–163.

10 *Пермяков Д.С.* Дифференцирования классических алгебр Ли над полем характеристики 2 // Вестн. ННГУ. Сер. Математика. — 2005. — № 1 (3). — С. 123–134.

Ш.Ш.Ыбыраев

Классикалық модуляр Ли алгебраларының шектелген локалды деформациялары туралы

Классикалық модуляр Ли алгебраларының әдеттегі когомологиялары түбір жүйесі түбірлерінің ұзындығы бойынша біртекті емес және, өріс сипаттамасы $p=2$ болған жағдайлардан басқа, барлық жағдайларда толық зерттелген. Ал классикалық модуляр Ли алгебраларының шектелген локалды деформациялары әлі зерттелмеген. Мақалада сипаттамасы $p>0$ алгебралық тұйық k өрісіндегі түбірлер жүйесі ұзындығы бойынша біртекті классикалық Ли алгебраларының шектелген локалды деформациялары есептелген. k өрісіндегі классикалық Ли алгебрасы деп жай алгебралық группаның Ли алгебрасын немесе оның фактор-алгебрасын түсінеміз.

Sh.Sh.Ibrayev

On the restricted infinitesimal deformations of classical modular Lie algebras

Investigations of the original infinitesimal deformations of classical modular Lie algebras are completed, except the cases when root system has the nonhomogenous roots under root lengths and characteristic of a field $p = 2$. Restricted infinitesimal deformations of classical modular Lie algebras has not studied yet. In the present paper the restricted infinitesimal deformations of classical Lie algebras with a homogeneous root system over an algebraically closed field k of characteristic $p > 0$ are computed. By a classical Lie algebra over a field k we mean the Lie algebra of a simple algebraic group or its quotient algebra by the centre.

References

1 Hochschild G. *Cohomology of restricted Lie algebras*, Amer. J. Math., 1954, 76, p. 555–580.

2 Hogeweij G.M.D. *Almost classical Lie algebras: I, II*, Indag. Math., 1982, 44, p. 441–452, 453–460.

3 Weisfeiler B.Yu., Kac V.G. *Exponentials in Lie algebras of characteristic p* // Izvestiya. AN SSSR, Ser. Matematika, 1971, 35, p. 762–788.

4 Gerstenhaber M. *On the deformation of rings and algebras* // Ann. Math., 1964, 79, p. 59–103.

5 Rudakov A.N. *Deformations of simple Lie algebras* // Izvestiya. AN SSSR, Ser. Matematika, 1971, 35, 5, p. 1113–1119.

6 Dzhumadil'daev A.S. *On the deformations of classical simple Lie algebras*, Uspehi Mat. Nauk, 1976, 31, 3, p. 211–212.

7 Chebochko N.G. *Deformations of classical Lie algebras with homogeneous root system in characteristic two. I*, Matem. Sbornik, 2005, 196, 9, p. 125–156.

8 Viviani F. *Restricted infinitesimal deformations of restricted simple Lie algebras*, J. Algebra. Appl., 2012, 11, 5, 19 p.

9 Dzhumadil'daev A.S., Ibraev S.S. *Homology, Homotopy and Applications*, 2002, 4 (2), p. 141–163.

10 Permyakov D.S. *Bull. NNGU. Ser. Matematika*, 2005, 1 (3), p. 123–134.