

Модельдер мен теориялардың позитиві косемантикалығы, атомды модельдердің кейбір түрлері

Positive cosemanticness of models and theories, some kinds of atomic models

Ешкеев А.Р.

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті (E-mail: Modth1705@mail.ru)

В этой статье введено и проанализировано понятие позитивной косемантичности для позитивных йонсоновских теорий и их моделей, исследуется поведение некоторых видов атомных моделей Δ - PM -теорий. Для этих моделей рассмотрены связи между их синтаксическими и семантическими свойствами. Основным методом исследования данной работы является семантический метод для йонсоновских теорий, сущность которого заключается в переносе теоретико-модельных свойств центра на саму теорию.

In this paper the concept of positive cosemanticness for positive Jonsson's theories and their models is introduced and examined. Also we investigate the behavior of certain types of atomic models of Δ - PM -theories. For these models the relationship between their syntactic and semantic properties is examined. The main research method of this paper is a semantic method for Jonsson's theories. Its essence lies in the transfer of model-theoretic properties of the center on the theory itself.

Модельдер теориясының негізгі есебі — ол теориялардың және олардың модельдер кластарының екі негізгі ұғымның классификациясын өткізу. Бекітілген теориялардың модельдері әр түрлі әдістермен өзара классификацияланады, мысалы, изоморфизм, элементарлы эквиваленттік. Әдетте бұлар толық теориялар үшін қарастырылады. Толық емес теориялар жағдайында (йонсондық теориялар жалпы жағдайда осындай болады) екі модельдің «элементарлы эквиваленттігі» ұғымын «йонсондық эквиваленттік» ұғымына Т.Ф.Мұстафин жалпылаған және осы ұғымдардың негізінде авторлар [1]-де модельдер мен теориялардың косемантикалығы ұғымдарын қарастырған, сондай-ақ бұл теориялар йонсондық болған.

Мақалада теориялардың жаңа анықталған екі класында «косемантикалық» ұғым кейбір ұғымдармен байланысты зерттелген және қарастырылған. Атап айтқанда, [2]-ге енгізілген Δ - PJ -теориялар және [3]-ке енгізілген Δ - PM -теориялар қарастырылған. Бұл ұғымдар — Δ - PM -теориялардың саналымды модельдер класына тиісті Δ -финитті әлсіз дерлік $(\Sigma_{\beta+1}^+, \Sigma_{\alpha+1}^+)$ -атомды модельдер мен Δ - PJ -теориялар арасындағы Δ - PJ -косемантикалық ұғымдары. Δ - PJ -теориялар ұғымы Бен-Яковтың [4, 5]-ші жұмыстарына байланысты пайда болған. Ол [4, 5] жұмыстарының аясында модельдердің позитивті теориялардың ұғымдарын қарастырып, енгізген. «Жалпыланған-йонсондық теориялар» ұғымын Т.Ф.Мұстафин [6]-шы жұмысында зерттеген және енгізген. Δ - PM -теория ұғымы [4,5]-тегі модельдердің позитивті теориясы аясында жалпыланған-йонсондық теориялардың табиғи жалпылауы болып табылады. Δ - PJ және Δ - PM -теориялары йонсондық теорияның табиғи жалпылауы болады, егер олар сондай болса.

Біз қолданған белгілеулерді ұстанатымызды ескеру керек. Айталық, $0 \leq n \leq \omega$ болсын. Π_n^+ — $\forall \exists \dots \varphi$ түріндегі L^+ тілінің барлық формулаларының жиыны (яғни, кванторлардың n айнымалысымен L^+ -дегі формулалар, \forall -дан басталған). [6]-да қарастырылған теорияның жалпылауы болып табылатын теориялардың жаңа класын анықтаймыз. Дербес жағдайда, егер $n=0$, онда Δ - PJ -теорияның дербес жағдайын аламыз, ол [2]-де қарастырылған. [2]-де де, [6]-да да зерттелген теориялар йонсондық теорияның жалпылауы болып табылады, және олардың сондай болуын талап ету керек, себебі йонсондық емес Δ - PJ -теориялар бар.

Анықтама 1 [3]. T теориясы Δ -позитивті мұстафиндік (Δ - PM)-теория деп аталады, егер

- 1) T теориясында шексіз модельдер бар болса,
- 2) T теориясы Π_{n+2}^+ -аксиоматизацияланған болса,
- 3) T теориясы Δ - JEP -ға ие болса,
- 4) T теориясы Δ - AP -ға ие болса.

Анықтама 2. A — σ сигнатурасының кейбір ақырлы моделі болсын. A $\Delta - PJ$ -моделі деп аталады, егер $Th_{\forall\exists^+}(A)$ сөйлемдер жиыны $\Delta - PJ$ -теориялы болатын болса.

Белгілеу. $Th_{\forall\exists^+}(A)$ теориясын $\forall\exists^+(A)$ арқылы белгілейміз.

Келесі нәтиже [1]-дегі 1-ші сөйлемді және [7]-дегі 9-лемманы жалпылайды.

Лемма 1. Айталық, T — $\Delta - PJ$ -теория, экзистенциалды сөйлемдер үшін толық болсын. Онда T теориясының кез келген моделі $\Delta - PJ$ -модель болады.

Дәлелдеуі. Егер T теориясы йонсондық болған жағдайда, онда ол келесі фактіден шығады: T^0 Кайзердің позитивті қабықшасы T үшін йонсондық болып табылады, мұндағы $T^0 = Th_{\forall\exists^+}(C)$; C — T -ның семантикалық моделі. Егер T теориясы йонсондық емес болса, онда семантикалық модель ретінде [4, 5]-дегі әмбебап облысты қарастырамыз. Максималды позитивті Кайзер қабықшасы туралы пайымдау толығымен әмбебап облысқа ауысады.

Анықтама 3. A және B модельдері $\Delta - PJ$ -эквивалентті деп аталады, егер кез келген T -дағы $\Delta - PJ$ -теориясы $A \models T \Leftrightarrow B \models T$ болса, және $A \equiv_{PJ}^{\Delta} B$ деп белгілейміз.

Келесі нәтиже [1]-дегі 1-теореманың жалпылауы.

Лемма 2. A және B — σ сигнатурасының модельдері болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

$$1) A \equiv_{PJ}^{\Delta} B; 2) \forall\exists^+(A) = \forall\exists^+(B).$$

Дәлелдеуі. Йонсондық жағдайда дәлел [1]-ден шығады.

Анықтама 4. Екі $\Delta - PJ$ T_1 және T_2 -теориялары $\Delta - PJ$ -косемантикалық $T_1 \triangleright_{\Delta - PJ}^{\Delta} T_2$ деп аталады, егер T_1 және T_2 йонсондық теориялар болған жағдайда, олардың жалпы семантикалық моделі болса, және олар йонсондық емес болған жағдайда, олардың жалпы әмбебап облысы бар болса.

Анықтама 5. σ сигнатурасының A және B модельдері $\Delta - PJ$ -косемантикалық $A \triangleright_{\Delta - PJ}^{\Delta} B$ деп аталады, егер кез келген $\Delta - PJ$ $A \models T_1$ теориясы үшін $\Delta - PJ$ T_2 теориясы табылса, $B \models T_2$ және T_1 -мен $\Delta - PJ$ -косемантикалық болса және керісінше.

Кез келген A және B модельдері үшін келесі импликациялар ақиқат:

$$A \equiv B \Rightarrow A \equiv_{PJ}^{\Delta} B \Rightarrow A \triangleright_{\Delta - PJ}^{\Delta} B.$$

Келесі келісушілік өте маңызды болып табылады. Нақты, біз $\Delta - PJ$ -теорияның семантикалық аспектісі туралы айтамыз. Егер $\Delta - PJ$ -теория T йонсондық болса, онда біз $ModT$ -мен кейбір йонсондық теорияның модельдерінің класы сияқты жұмыс істейміз. Егер $\Delta - PJ$ -теория T йонсондық болмаса, онда біз оның позитивті экзистенциалды тұйық E_T^+ модельдерінің класын қарастырамыз. E_T класы үшін бұл жол — кез келген әмбебап T теориясының экзистенциалды тұйық модельдерінің класы [8]-де қарастырылған. Йонсондық теорияларға қатысты екі жағдай: кемелдік және кемелдік емес бар болғандықтан, біз келесіні ұстанамыз. [7]-ден жақсы белгілі, егер T йонсондық теория кемел болса, онда оның экзистенциалды тұйық E_T модельдерінің класы элементарлы және $ModT^*$ -мен беттеседі, мұндағы T^* — оның центрі. Керісінше жағдайда, яғни T теориясы кемел емес болса, біз [8]-дегідей әрекет жасаймыз, яғни $ModT$ -ның орнына E_T^+ класымен жұмыс істейміз. Кез келген T $\Delta - PJ$ -теория қарастырылғанда, онда E_T^+ класы E_T класының кеңейтуі ретінде қарастырылады (екеуі де ылғи бар), және T теориясының кемелдігі және кемел еместігіне байланысты E_T^+ класының модельді-теоретикалық қасиеттері қызығушылық тудырады.

Лемма 3. T_1 және T_2 — $\Delta - PJ$ -теориялары болсын, $C_1 - T_1$ -дің семантикалық моделі, ал $C_2 - T_2$ -нің семантикалық моделі болсын. Егер $(T_1)_{\forall\exists^+} = (T_2)_{\forall\exists^+}$ болса, онда $T_1 \triangleright_{\Delta - PJ}^{\Delta} T_2$.

Дәлелдеуі. T_1 және T_2 позитивті әмбебап салдар беттесетін йонсондық жағдайда олардың модельді үйлесімдігі шығады. Сәйкесінше, T_1 -дің семантикалық моделі T_2 -нің моделі болып табылады, және T_2 -нің семантикалық моделі T_1 -дің семантикалық моделі болады. Әрі қарай біз [1]-дегі дәлелдердің жалпылауын қарастырамыз.

Йонсондық жағдайда егер семантикалық модельдер ретінде жоғарыда анықталған әмбебап облыстарды қарастырса, онда олар [4,5] мағынасында позитивті экзистенциалды модель болатынын байқау оңай. $\Delta - PJ$ -теорияның семантикалық аспекті туралы ескерту бойынша біз йонсондық жағдайда E_T^+ -ғы модельдермен жұмыс істейміз, барлық сөйлемдер батуға айналғандықтан, біз ешқандай қиындықсыз йонсондық жағдайға байланысты дәлелді қайталай аламыз.

Теорема 1. T_1 және T_2 — $\Delta - PJ$ -теориялары болсын, $C_1 - T_1$ -дің семантикалық моделі, ал $C_2 - T_2$ -нің семантикалық моделі болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

$$1) C_1 \triangleright \triangleleft_{PJ}^{\Delta} C_2; 2) C_1 \equiv_{PJ}^{\Delta} C_2; 3) C_1 = C_2.$$

Дәлелді. 3 леммасына сәйкес екі жағдайды қарастырамыз. Йонсондық жағдайда [1]-дегі дәлелді тек бір ғана айырмашылықпен қайталаймыз: Δ позитивті буль комбинацияға байланысты тұйық және жоғарыдағыдай бекітілген. Йонсондық емес жағдайда C_1 U_1 -ге алмастырылады, C_2 U_2 -ге алмастырылады, мұндағы U_1 және U_2 — әмбебап облыстар, соған сәйкес T_1 және T_2 үшін де. Онда жоғарыда көрсетілген тұжырым $U_1 \in E_T^+$ және $U_2 \in E_T^+$ -дан шығады. $\Delta - PJ$ -теорияның семантикалық аспекті туралы ескертуді қолдану ғана қалады.

Келесі нәтиже [1]-дегі 4-теореманы жалпылайды.

Теорема 2. A және B — $\Delta - PJ$ -модельдері болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

$$1) A \triangleright \triangleleft_{PJ}^{\Delta} B; 2) \forall \exists^+(A) \triangleright \triangleleft_{PJ}^{\Delta} \forall \exists^+(B).$$

Дәлелдеуі. Йонсондық жағдайда, алдыңғы теоремадағыдай, [1]-дегі дәлелдің позитивті жалпылауын қарастыру жеткілікті: Δ позитивті буль комбинацияға байланысты тұйық және жоғарыдағыдай бекітілген. Йонсондық емес жағдайда теореманың шарттары бойынша $Th_{\forall \exists^+}(A)$ және $Th_{\forall \exists^+}(B)$ сөйлемдердің жиынының екеуі де $\Delta - PJ$ -теория пайда болады. Онда олар үшін $\Delta - PJ$ -теорияның семантикалық аспекті туралы ескертуді қолдануға болады.

Анықтама 6. T $\Delta - PM$ -теорияның A моделі T -ның Δ -финитті квази-әлсіз $(\Sigma_{\beta+1}^+, \Sigma_{\alpha+1}^+)$ -атомды моделі деп аталады, егер кез келген $\bar{a} \in A$ үшін келесілердің біреуі орындалса:

- 1) $\psi(\bar{x}) \in \Sigma_{\alpha+1}^+$ табылады және $A \models \psi(\bar{a})$ орындалады, $\psi(\bar{x}) \ t_{\Sigma_{\alpha+1}^+}^A(\bar{a})$ жасайды;
- 2) $k < \omega$, $\psi_1(\bar{x}), \psi_2(\bar{x}), \dots, \psi_k(\bar{x}) \in \Sigma_{\beta+1}^+$ табылады және
 - а) әрбір $\psi_i(\bar{x}) \ t_{\Sigma_{\alpha+1}^+}^A(\bar{a})$ жасайды, $1 < i < k$;
 - б) $T \ \psi_i(\bar{x})$ -пен үйлесімді, $1 \leq i < k$;
 - в) егер $\varphi(\bar{x}) \in \Sigma_{\beta+1}^+$, $\varphi(\bar{x})$ T -мен үйлесімді болса және $\varphi(\bar{x}) \ t_{\Sigma_{\alpha+1}^+}^A(\bar{a})$ жасаса, онда $T \models \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi_i(\bar{x})$ кейбір $\psi_i(\bar{x})$ үшін, $1 \leq i < k$.

Осы анықтамаға байланысты $\Delta - PM$ -теорияның саналымды модельдер класында келесі нәтиже алынған: алгебралық жайлық проблемасы және автордың алдыңғы алынған нәтижесін жалпылау.

Лемма 4. Егер $\beta \geq \alpha$, $A - T$ -ның саналымды Δ -финитті әлсіз дерлік $(\Sigma_{\beta+1}^+, \Sigma_{\alpha+1}^+)$ -атомды моделі болса, онда $A - T$ -ның жақсы әлсіз дерлік $(\Sigma_{\beta+1}^+, \Sigma_{\alpha+1}^+)$ -атомды моделі болып табылады.

Дәлелдеуі. Бұл дәлелдер йонсондық болған жағдайда ақиқат.

Айталық, $\bar{a}^{\omega} = \langle a_1, \dots, a_n, \dots \rangle$ — A -дағы элементтер болсын.

1-жағдай. A — әлсіз $(\Sigma_{\alpha+1}^+, \Sigma_{\alpha+1}^+)$ -атомды модель. Онда $\psi_n(\bar{x}^n)$ - $\Sigma_{\alpha+1}^+$ формуладан және $A \models \psi_n(\bar{x}^n)$ және $\psi_n(\bar{x}^n) \ t_{\Sigma_{\alpha+1}^+}^A(\bar{a}^{\omega})$ -ны батырады, $1 \leq n < \omega$. $T \models \psi_n(\bar{x}^n) \leftrightarrow \exists^+ x_{n+1} \psi_{n+1}(\bar{x}^{n+1})$, $1 \leq n < \omega$ түсіну оңай. Енді айқын, кез келген \bar{a}^{ω} бойынша $A - T$ -ның жақсы әлсіз дерлік $(\Sigma_{\beta+1}^+, \Sigma_{\alpha+1}^+)$ -атомды моделі, демек, $A - T$ -ның жақсы әлсіз дерлік $(\Sigma_{\beta+1}^+, \Sigma_{\alpha+1}^+)$ -атомды моделі де болады, себебі $\beta \geq \alpha$.

2-жағдай. $A—T$ -ның жақсы квази-элсіз $(\Sigma_{\beta+1}^+, \Sigma_{\alpha+1}^+)$ -атомды моделі емес. Бұл жағдайда $n < \omega$ және \bar{a}^n табылмайды және \bar{a}^n үшін б-анықтаманың 1) шарты орындалмайды. Барлық $m \geq n$ үшін \bar{a}^n б-анықтаманың 1) шартын қанағаттандырмайтынына көз жеткізу қиын емес. Сондықтан T -мен үйлесімді $k_m < \omega$, $\psi_i^m(\bar{x}^m)$, $\psi_i^m(\bar{x}^m) \Sigma_{\beta+1}^+$ формулалары, $1 \leq i \leq k_m$ табылады, және әрбір m үшін ($n \leq m < \omega$): а) $\psi_i^m(\bar{x}^m) t^m = t_{\Sigma_{\alpha+1}^+}^A(\bar{a}^m)$, $1 \leq i \leq k_m$ -ды жасайды; б) егер $\psi(\bar{x}^m) \Sigma_{\beta+1}^+$ T -мен үйлесімді болса және t^m жасаса, онда кейбір $1 \leq i \leq k_m$ үшін $T|-\varphi(\bar{x}^m) \leftrightarrow \psi_i^m(\bar{x}^m)$. Әрбір m , $n \leq m < \omega$, үшін және әрбір j , $1 \leq j \leq k_{m+1}$ үшін i табылады және $1 \leq i \leq k_m$ орындалады және $T|-\psi_i^m(\bar{x}^m) \leftrightarrow \exists^+ x_{m+1} \psi_j^{m+1}(\bar{x}^{m+1})$ ақиқат. Енді $\{\psi_i^m(\bar{x}^m) : n \leq m < \omega, 1 \leq i \leq k_m\}$ жиынға R бинарлы қатынасын келесі жолмен енгіземіз:

$$\langle \psi_i^m(\bar{x}^m), \psi_j^k(\bar{x}^k) \rangle \in R \Leftrightarrow m+1 = k \ \& \ T|-\psi_i^m(\bar{x}^m) \leftrightarrow \exists^+ x_{m+1} \psi_j^{m+1}(\bar{x}^{m+1}).$$

[9] саналымды графалар туралы Кениг теоремасы бойынша барлық $n \leq m < \omega$ үшін $\psi_i^m(\bar{x}^m)$, $n \leq m < \omega$, $1 \leq i \leq k_m$ формулалар табылады және $\langle \psi_i^m(\bar{x}^m), \psi_{i_{m+1}}^{m+1}(\bar{x}^{m+1}) \rangle \in R$ орындалады. Айталық, егер $n \leq m < \omega$ болса, онда $\Phi_m(\bar{x}^m) = \psi_{i_m}^m(\bar{x}^m)$ және егер $1 \leq m < n$ болса, онда $\Phi_m(\bar{x}^m) \exists^+ x_{m+1}, \dots, x_n \psi_{i_m}^n(\bar{x}^n)$. $A—T$ -ның жақсы квази-элсіз $(\Sigma_{\beta+1}^+, \Sigma_{\alpha+1}^+)$ -атомды моделі екені ақиқат.

References

1. *Mustafin E., Nurkhaidarov E.* Jonsson equivalent and cosemantical models // Quatrieme Colloque Franco-Touranien de Theorie des Modeles: Resumes des Conferences. — Marseille, 1997. — P. 13–15.
2. *Yeshkeev A.R.* Categorical positive theories. Syntactic и semantics of logic systems: The materials of Russian school-seminar, dedicated to centenary of Godel (23–27 August). — Irkutsk: Institute of Mathematics SD RAS, Pu. st. ped. Univ., 2006. — P. 28–32.
3. *Yeshkeev A.R.* Countable categoricity of $\Delta - PM$ -theories // Theses of reports of 12-th interuniversity conference of mathematics, mechanics and informatics (10–14 September 2008 y.). — Almaty: Kazakh University Publ., 2008. — P. 67.
4. *Itay Ben-Yaacov* Positive model theory and compact abstract theories // Journal of Mathematical Logic 2003. 3. — № 1. — P. 85–118.
5. *Itay Ben-Yaacov.* Compactness and independence in non first order frameworks // Bulletin of Symbolic logic. — 2005. — Vol. 11. — № 1. — P. 28–50.
6. *Mustafin T.G.* Generalized conditions of Jonsson and description of generalized Jonsson’s theories of Boolean algebras // Mathematical works. — Novosibirsk. — Vol. 1. — № 1. — 1998. — P. 9; *Keisler H.J., Chen Ch.Ch.* The theory of models. — M.: World, 1977. — 614 p.
7. *Yeshkeev A.R.* On similarities in the Jonsson’s theories: The materials of 10-th interuniversity conference of mathematics and mechanics. — Vol. 1. — Almaty, 2005. — P. 182–184.
8. *Pillay A.* Forking in the category of existentially closed structures // Connection between Model Theory and Algebraic and Analytic Geometry (A.Macintyre, ed.), Quaderni di Matematica. — Vol. 6. — University of Naples. — 2000. — P. 135–197.
9. *Keisler H.J., Chen Ch.Ch.* The theory of models. — M.: World, 1977. — 614 p.