Б.Х.Тұрметов, А.У.Қуанышбаева

Бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулерді шешудің бір әдісі туралы

Мақалада бөлшек ретті дифференциалдық теңдеуді құрудың жаңа әдісі қарастырылды. Бұл әдіс операторлық алгоритм әдісіне негізделген әдістің жалпыламасы болады. Сонымен қатар арнайы функциялардың жаңа түрлері енгізіліп, зерттелді.

B.H.Turmetov, A.U.Kuanyshbaeva

About one of the methods of solving differential equations of fractional order

In this work we present a new method of construction of a solution of fractional order differential equations. This method is a generalization of the widely known method based on operator algorithms. Moreover, new types of special functions are introduced and investigated.

ӘОЖ 539.3

$\boxed{\text{К.А.Тұрсынов}}$, С.Б.Ахажанов, Л.С.Мәкенова

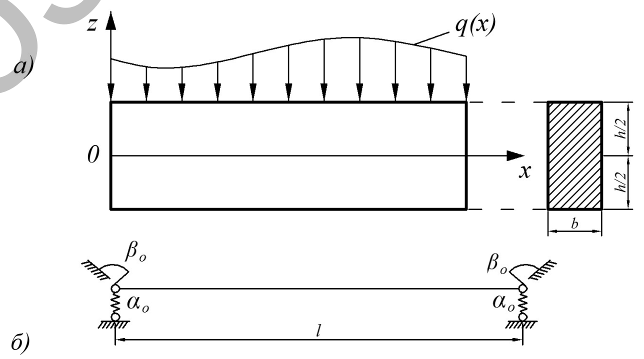
Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті (E-mail: laura_makenova@mail.ru)

Серпімді-илемділік кезеңіндегі арқалықты есептеу

Мақалада материалы илемді, таза серпімді және серпімді-илемділі болғандағы арқалықты есептеу қарастырылған. Серпімді бекіністегі арқалықтың иілуінің кернеулік-деформациялық күйі илемділік жағдайда толығымен анықталған. Нормалдық кернеудің және арқалық материалының модулінің өзгеру заңдылықтары алынған. Арқалықтың ішкі күштері мен жылжулары табылған. Алынған нәтижелердің мәндері кесте және график түрінде көрсетілген.

Кілтті сөздер: илемді, таза серпімді, серпімді-илемділі, серпімді бекіністегі арқалық, кернеулік-деформациялық күй.

Алдымен $q(x)$ таралған жүктемесімен жүктелген $(0 \le x \le 1, -\frac{1}{2} \le z \le \frac{1}{2})$ координата жүйесінде көлденең қимасы тіктөртбұрыш болатын арқалықты қарастырайық (1-сур., а).



1-сурет: а) жүктелу схемасы; б) тіреу схемасы

Сыртқы жүктеме мына заң бойынша өзгереді:

$$q(x) = q_0 \cdot PU(x), \tag{1}$$

мұндағы q_0 — ең үлкен жүктеме; $PU(x)$ — жүктеменің таралу функциясы. $PU(x) = 1$ болғанда жүктеме біртекті таралған болып табылады.

Арқалықтың деформациялану заңын мына түрде қабылдап аламыз:

$$\sigma(\xi)=\sigma_0\cdot\varphi(\xi),\quad \begin{cases}\varphi(\xi)=\beta\xi+\dfrac{\xi}{\xi_1}(1-\beta), & 0\le\xi\le\xi_1;\\ \beta\xi+(1-\beta), & \xi_1\le\xi\le 1;\end{cases}$$

$$\sigma_0=\frac{1}{2j}\frac{M}{W_{pl}};\quad W_{pl}=\frac{bh^2}{4};\quad \xi=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}; \tag{2}$$

$$j=\frac{1}{6}(3-\beta)-\frac{1}{6}(1-\beta)\xi_1^2,$$

мұндағы σ_0 — ең үлкен нормаль кернеу; M — иілу моменті; W_{pl} — көлденең қиманың қарсыласуының илемділік моменті; ξ — деформация параметрі; ε_0 — шектік деформация; ξ_1 — серпімді деформация параметрі; β — арқалықтың материалының беріктілік параметрі $(0<\beta<1)$.

β параметрінің шектік мәндері:

а) $\beta=0$ және $\xi=\xi_1$ болғанда арқалықтың материалы илемді болады;

б) $\beta=1$ және $\xi_1=1$ болғанда арқалықтың материалы таза серпімді деп қабылданады;

в) $\beta=0$ және $\xi\ne\xi_1$ болғанда арқалықтың материалы серпімді-илемділі болады.

Арқалықтың тепе-теңдік теңдеуі мына түрде анықталады:

$$E(\xi)\cdot I\frac{d^4W}{dx_1^4}=q(x),\quad x_1=xl,\quad I=\frac{bh^3}{12}, \tag{3}$$

мұндағы $E(\xi)$ — деформация параметрінен тәуелді арқалықтың материалының модулі; I — арқалықтың көлденең қимасының осьтік момент инерциясы.

Келесі белгілеулерді енгізсек:

$$E(\xi)=E_0\cdot f(\xi),\quad W(x,\xi)=W_0(\xi)\cdot X(x);$$

$$W_0(\xi)=\frac{1}{f(\xi)}\frac{q_0l^4}{E_0I}. \tag{4}$$

Енді (3)-теңдеуі мына түрге келтіріледі:

$$X^{IV}(x)=PU(x), \tag{5}$$

мұндағы $X(x)$ — арқалықтың майысуының өлшемсіз функциясы.

Егер арқалықта серпімді-икемді тіреу болатын болса (1-сур., б), онда (5)-теңдеуінің шешімі келесі түрде болады:

$$X(x)=\frac{1}{24}\left(x^4-2x^3+x^2\right)+\beta_0(x-x^2)+\alpha_0, \tag{6}$$

мұндағы α_0,β_0 — сызықтық және бұрыштық жылжулар кезіндегі арқалықтың илемділік параметрлері.

$f(\xi)$ арқалықтың материалының модулінің өзгеру заңы (2) сәйкес мына түрде табылады:

$$f(\xi)=\begin{cases}1, & 0\le\xi\le\xi_1;\\ \underbrace{\dfrac{\beta\xi+(1-\beta)}{\beta\xi+\dfrac{\xi}{\xi_1}(1-\beta)}}_{k(\xi)}, & \xi_1\le\xi\le 1,\end{cases} \tag{7}$$

мұндағы $k(\xi)$ — серпімділікті ескермегендегі арқалық материалы модулінің өзгеру заңы.

Төменде, (4) және (6) қолдана отырып, арқалықтың ішкі күштерін анықтаймыз:

$$M(x)=-E(\xi)\cdot I\frac{d^2W}{dx^2}=-\left[\frac{1}{2}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)-2\beta_0\right]q_0l^2;$$

$$Q(x)=-E(\xi)\cdot I\frac{d^3W}{dx_1^3}=\left(\frac{1}{2}-x\right)q_0l, \tag{8}$$

мұндағы $M(x), Q(x)$ — бірқалыпты таралған жүктеменің әсерінен пайда болған арқалықтың иілу моменті мен көлденең күштері.

Ең үлкен кернеулердің өрнектерін ескере отырып,

$$\sigma_0 = \frac{M(x)}{2jW_{pl}}; \qquad \tau_0 = \frac{Q(x)}{bh}.$$

Мизестің илемділік шартынан [1] $\sigma_0^2 + 3\tau_0^2 = \sigma_T^2$ ішкі күштер мен серпімді деформация параметрінің арасындағы тәуелділікті орнатамыз:

$$\xi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{(1-\beta)}\left[\left(1-\frac{\beta}{3}\right) - \gamma_0(x)\frac{M(x)}{U_{pr}}\right]}; \tag{9}$$

$$\gamma_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{16}\left[\frac{Q(x)h}{U_{pr}}\right]^2}}, \quad U_{pr} = \sigma_T \cdot W_{pl},$$

мұндағы U_{pr} — шектік иілу моменті; σ_T — арқалық материалының серпімділік шегі.

Арқалықтың көлденең қимасының бұрылу бұрышы (4) сәйкес мына түрде болады:

$$\theta(x,\xi) = \frac{1}{l}\frac{dW}{dx} = \left\{\frac{1}{24}\left(4x^3 - 6x^2 + 2x\right) + \beta_0(1-2x)\right\}\frac{1}{f(\xi)}\frac{q_0 l^3}{E_0 I}, \tag{10}$$

мұндағы E_0 — арқалық материалының бастапқы модулі; β_0 — бекітілген тіреулердің бұрылуы кезіндегі илемділік параметрі; x — өлшемсіз бойлық координата.

Шектік иілу моментін мына түрде жазайық:

$$U_{pr} = \frac{q_{pr} l^2}{8}(1+4\beta_*), \quad \beta_* = -\frac{1}{6} + 4\beta_0, \tag{11}$$

$\beta = 0$ болғандағы серпімді деформация параметрін келесі түрде көрсетейік:

$$\xi_1(x) = \sqrt{3}\sqrt{1-\gamma_0(x)\cdot a_*\left(x - x^2 + \beta_*\right)}, \quad a_* = \frac{4}{(1+4\beta_*)}\frac{q_0}{q_{pr}}; \tag{12}$$

$$\gamma_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{16}\cdot b_*^2\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}}, \quad b_* = \frac{8}{1+4\beta_*}\left(\frac{h}{l}\right)\left(\frac{q_0}{q_{pr}}\right),$$

мұндағы $\gamma_0(x)$ — серпімді деформация параметріне әсер ететін көлденең күшті ескеретін функция; q_{pr} — шекті жүктеменің қарқындылығы.

Ұзын арқалық үшін $\frac{h}{l} \to 0,$ сондықтан оларға $\gamma_0(x) = 1$ қабылданады.

Осы жағдай үшін серпімді және илемділі аумақтардың шекараларын анықтаймыз. Осы мақсатта $q_0 = q_{pr}$ қабылдасақ, (12)-формула бойынша $x = \frac{1}{2}$ болғандағы $\xi_1(x)$ мәнін есептейміз:

$$\xi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\sqrt{1-a_*\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\beta_*\right)} = \sqrt{3}\sqrt{1-a_*\frac{\left(1+4\beta_*\right)}{4}} \equiv 0.$$

Алынған нәтиже мынаны көрсетеді: $x = \frac{1}{2}$ болғанда арқалықтың көлденең қимасы илемділік деформациясымен толығымен анықталады.

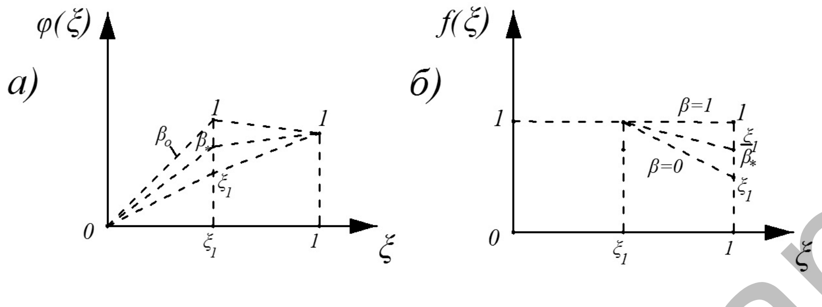
Арқалықтың $x = x_0$ көлденең қимасында тек серпімді деформация болса, (12)-формуласынан келесі теңдеуді аламыз:

$$\xi_1(x_0) = 1 \to x_0^2 - x_0 + m_0 = 0, \quad m_0 = \frac{2}{3a_*} - \beta_*.$$

Оның шешімінен $(\beta = 0)$ беріктілік параметрі ескермегендегі серпімді аумақтың шекараларын анықтаймыз:

$$(x_0)_{1/2} = \frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4m_0}\right]. \tag{13}$$

Нормаль кернеулердің өзгеру заңы (2) мен материалдың модулін диаграмма (7) түрінде көрсетуге болады (2-сур.).



2-сурет. Диаграммалар: а) нормалдық кернеудің өзгеру заңдылығы; б) материал модулі

Материалдың беріктілік параметрін $0 \le \beta \le 1$ аралығында өзгерте отырып, серпімді және илемділі материалдың өзгеруін зерттеуге болады. Осы кезде $\beta = 0$ илемділі жағдайға сәйкес келеді, ал $\beta = 1$ — серпімді кезең. $\xi_1 \to 0$ серпімді деформация параметрінің мәндерінде илемділі деформация басым болады.

Таралған жүктің шектік қарқындылығын, (9) және (11) өзара теңестіре отырып, анықтаймыз:

$$q_{pr} = \frac{2\sigma_T b}{(1 + 4\beta_*)}\left(\frac{h}{l}\right)^2. \tag{14}$$

Өлшемсіз майысу өрнегіне (6) енетін α_0, β_0 серпімді-икемді тіреу параметрлері әр түрлі мәндерге ие болады.

Дербес жағдайлары:

– қатты бекітілген болса, $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0.$

– топсалы бекітілген болса, $\alpha_0 = 0, \beta_0 = \frac{1}{24}.$

Жалпы жағдайда α_0, β_0 келесі формулалар бойынша табылады:

$$\alpha_0 = \frac{a}{l^3 / EI}; \quad \beta_0 = \frac{b}{l / EI}, \tag{15}$$

мұндағы a, b — серпімді бекіністердің икемділігі (бірлік күштің және моменттің әсерінен пайда болған).

Бірлік күштер мен моменттер болғандағы арқалықтың икемділігін (15)-формула бойынша анықтайды.

Осы алынған формулалар бойынша серпімді бекіністегі арқалықтың иілуінің кернеулік-деформациялық күйін, илемділік жағдайда толығымен анықтауға мүмкіндік бар.

Біртекті жүктемемен жүктелген, материалы илемді болғандағы арқалықты есептеуге мысал қарастырайық.

Мысал 1. Материалы илемді болатын арқалықты (1-сур.) координаттық жүйеде қарастырамыз. Оған қарқындылығы q_0 бірқалыпты таралған жүктеме әсер ететін болсын.

Берілгені: $\xi = \xi_1 = 1;\ \beta = 0;\ a = b = 0{,}1;\ q = 1;\quad l = 1;\ \sigma_T = 10^3;\ \AA = 0{,}2 \cdot 10^2.$

Жоғарыда келтірілген формулаларды қолдана отырып, арқалықтың майысу функциясы, ішкі күштері және бұрылу бұрышы анықталған. Нәтижелері 1, 2-кестелерде көрсетілген.

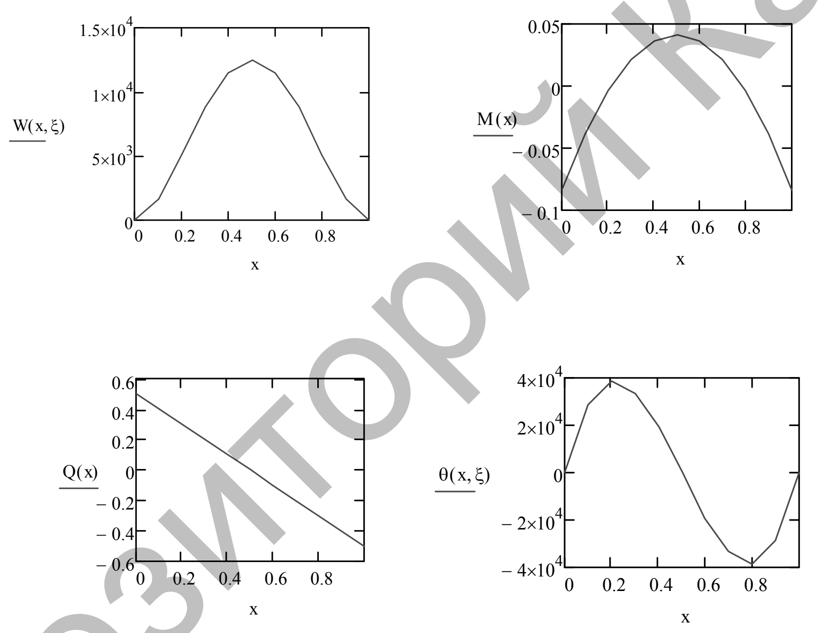
1 - к е с т е

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$W(x)$	0.0999	1620.1089	5120.1159	8820.1209	11520.1239	12500.1249
$M(x)$	-0.0833	-0.0383	-0.0033	0.0216	0.0366	0.0416
$Q(x)$	0.4999	0.3999	0.2999	0.1999	0.0999	0.0
$\theta(x)$	0.1	$2.88\cdot10^4$	$3.84\cdot10^4$	$3.36\cdot10^4$	$1.92\cdot10^4$	$-5.821\cdot10^{-12}$

2 - к е с т е

X	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$W(x)$	11520.1239	8820.1209	5120.1159	1620.1089	0.0999
$M(x)$	0.0366	0.0216	-0.0033	-0.0383	-0.0833
$Q(x)$	0.4999	0.3999	0.2999	0.1999	0.0999
$\theta(x)$	0.1	$2.88\cdot10^4$	$3.84\cdot10^4$	$3.36\cdot10^4$	$1.92\cdot10^4$

Mathcad программасын қолдану арқылы арқалықтың майысу функциясының, бұрылу бұрышының және ішкі күштерінің эпюраларын тұрғызуға болады (3-сур.).



3-сурет. Арқалықтың майысу функциясының, ішкі күштерінің және бұрылу бұрышының эпюралары

Сонымен, алынған формулалар бойынша, серпімді бекіністегі арқалықтың иілуінің кернеулік-деформациялық күйін илемділік жағдайда толығымен анықтауға болады.

References

1 *Sokolovski V.V.* The theory of plasticity // Moscow: High School, 1969. — P. 528–538.

К.А.Турсынов, С.Б.Ахажанов, Л.С.Макенова

Расчет балки на упруго-пластической стадии

В статье рассмотрены чисто упругая, пластичная и упруго-пластичная балки. Полностью найдено напряженно-деформационное состояние упруго-защемленной балки при ее пластичности. Были получены нормальное напряжение и модуль закономерности изменения материала балки. Найдены внутренние силы и перемещения. Полученные результаты приведены в виде таблиц и графиков.

K.A.Tursynov, S.B.Ahaganov, L.S.Makenova

Calculation of the beam on elastic-plastic stage

The article deals with a purely elastic, plastic and elastic-plastic beam. The stress — strain the form of elastically-clamped beam in its plasticity is totally found. It was taken the normal stress and the modulus of the material laws of change of the beam. We find the internal forces and displacements. The results are shown in tables and graphs.

УДК 338.46

Р.А.Яушев, Т.В.Микляева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: Larisatash_88@mail.ru, tana_kz@mail.ru)

Методы теории нечеткой логики при оценке возможностей железных дорог Казахстана

Основная идея нечеткой логики состоит в том, что интеллектуальный способ рассуждений, опирающийся на естественный язык общения человека, не может быть описан в рамках традиционных математических формул. Формальному подходу присуща строгая однозначность интерпретации, а все, что связано с применением естественного языка, имеет многозначную интерпретацию. В работе использован данный подход для решения задачи оценки потенциала железных дорог Казахстана. Поскольку каждая железная дорога представляет собой многомерный объект, осуществлен переход к сокращенному признаковому пространству с использованием метода главных компонентов, а затем решение формируется при помощи модуля Fuzzy Logic.

Ключевые слова: нечеткая логика, модуль Fuzzy Logic, нечеткий алгоритм, продукционное правило, антецедент, консицедент.

Сущность нечеткой логики (НЛ) состоит в том, что она представляет собой удобный путь отображения входного пространства в выходное: входные признаки — черный ящик — в выходные признаки.

В качестве черного ящика принципиально могут быть приняты различные системы, в частности, нейронные сети, экспертные системы, дифференциальные уравнения и т.д. В нашем случае роль «черного ящика» выполняет НЛ. В основе НЛ, отображающей входное пространство в выходное, используется механизм отображения в виде набора правил вида: «if…, then…» («если…, то…»).

Все правила оцениваются параллельно; порядок правил не важен. Прежде чем строить систему, описываемую правилами, необходимо определить все члены, которые будут использованы в системе, и прилагательные для их описания.

Укажем причины, на основе которых отдается предпочтение применению системы с НЛ:

– концептуально легче для понимания;

– гибкая система устойчива к неточным входным данным;

– может моделировать нелинейные функции произвольной сложности;

– в ней учитывается опыт специалистов-экспертов;

– основана на естественном языке человеческого общения.