ӘОЖ 517.95

М.Т.Дженалиев[1], М.И.Рамазанов[2], А.К.Жанболова[2]

[1]*ҚР БҒМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы;*
[2]*Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті*
(E-mail: ramamur@mail.ru)

Бірқалыпты қозғалмалы шекарасы бар жылуөткізгіштік теңдеуі үшін Вольтерра сингулярлы интегралдық теңдеуінің шешімі

Уақытта қозғалмалы шекаралы облыстардағы жылуөткізгіштік теңдеулерінің шеттік есептері үлкен қолданбалы мәнге ие. Мысалы, кристалдардың өсуінің теориясына, мұнай қабатттарының термикасына, шоғырланған энергия ағымдарымен ыстық өту мәселесіне, жаңғыш материалдар қабатындағы жану процестеріне қатысты мәселелерді шешу қозғалмалы шекаралы есептерді шешуге әкеледі. Облыстың шекаралары еркін қозғалыс заңымен өзгеретін осындай типті есептерді шешудің жалпы әдісі қарапайым және екі қабатты жылулық потенциалдар теориясына негізделеді, ол Вольтерр типті екінші текті интегралдық теңдеулерді шешудің қажеттігіне әкеледі.

Кілт сөздер: Вольтерр сингулярлы интегралдық теңдеуі, бірқалыпты қозғалмалы шекарасы бар жылуөткізгіштік теңдеуі, Лаплас түрлендіруі.

Бұл жұмыста шекарасы $x = t$ заңымен қозғалатын бір өлшемді жылулық есептің шешімі беріледі

$$G = \{(x,t) : t > 0, 0 < x < t\}$$

облысында

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімін табу керек. Бұл теңдеу

$$u(x,t) \mid_{x=0} = v(t), u(x,t) \mid_{x=t} = w(t) \tag{2}$$

шекаралық шарттарын қанағаттандыруы қажет. Мұндағы $u(x,t)$

$$[\gamma(x,t)]^{-1} \cdot u(x,t) \in L_\infty(G),$$

$$\gamma = max[\frac{\sqrt{t}}{t-x} \exp\{-\frac{x^2}{4a^2 t}\}; exp\{\frac{t-x}{a^2}\}],$$

класына тиісті, $\gamma(x,t) \geq 1$, $\{x,t\} \in G$.

$v(t)$ және $w(t)$ функцияларын үзіліссіз деп есептейміз. Қажет болған жағдайда, $t = 0$ аумағында шешім үзіліссіз болуы үшін қосымша үйлесімдік $v(0) = w(0)$ шартын қолдануымыз керек.

Жылулық потенциалдар әдісін қолдана отырып, берілген есептің шешімін Вольтерр сингулярлы интегралдық теңдеуінің шешіміне әкелуге болады [1].

$$\varphi(t) - \int_0^t K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \tag{3}$$

мұндағы

$$K(t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{t-\tau}{4a^2}\right) \right\}, \tag{4}$$

$$f(t) = -2a^2 \left[w(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{t}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{t^2}{4a^2(t-\tau)} \right) v(t)dt \right]. \tag{5}$$

$K(t,\tau)$ ядросы келесі қасиеттерге ие:

1) $K(t,\tau) \geq 0$ және $0 < \tau \leq t \leq 1$ аралығында үзіліссіз,

2) $\lim_{t \longrightarrow t_0} \int\limits_{t_0}^{t} K(t,\tau)d\tau = 0, t_0 \geq \varepsilon > 0;$

3) $\lim_{t \longrightarrow 0} \int\limits_{0}^{t} K(t,\tau)d\tau = 1.$

1) және 2) қасиеттер орындалатындығы айқын. Енді 3) қасиеттің орындалатындығын көрсетейік.

$$x = \sqrt{t-\tau}$$

ауыстыруын жасасақ, алатынымыз:

$$\int\limits_0^t K(t,\tau)d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{2t}{a^2}} \int\limits_0^{\sqrt{t}} \exp\left\{ -\left(\frac{t}{ax} + \frac{x}{2a} \right)^2 \right\} \left(\frac{t}{ax^2} - \frac{1}{2a} \right) dx +$$

$$+\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}} dx = \| z = \frac{t}{ax} + \frac{x}{2a}; \xi = \frac{x}{2a} \| = e^{\frac{2t}{a^2}} erfc\left(\frac{3\sqrt{t}}{2a} \right) + erf\left(\frac{\sqrt{t}}{2a} \right),$$

мұндағы

$$erf(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\theta} e^{-z^2} dz; erfc(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\theta}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Яғни

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \int\limits_0^t K(t,\tau)d\tau = 1,$$

сонымен қоса

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \int\limits_0^t K(t,\tau)d\tau = 1.$$

(3) теңдеудің шешімі [2–5]-те (4) ядроның сипаттамалық бөлігін бөліп алу арқылы және сипаттамалық теңдеудің шешімін регулиризациялау әдісі арқылы табылған. Мақалада біз теңдеудің шешімін Лаплас түрлендіруі әдісі арқылы іздестіреміз. Ол үшін

$$t + \tau = 2t - (t-\tau), \frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} = \frac{t\tau}{a^2(t-\tau)} + \frac{t-\tau}{4a^2}$$

қатынастарын қолданып,(3) теңдеуді келесі түрде жазамыз:

$$\varphi(t) - \int\limits_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{2t}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} exp\left\{ -\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)} \right\} - \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} exp\left\{ -\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)} \right\} + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \right\} \times$$

$$\times exp\left\{ -\frac{t-\tau}{4a^2} \right\} \varphi(\tau)d\tau = f(t). \tag{6}$$

Келесі
$$\varphi_1(t) = \sqrt{t} e^{\frac{\tau}{4a^2}} \cdot \varphi(t) \tag{7}$$
ауыстыруынан кейін (3) теңдеу
$$\varphi_1(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{t}{a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \cdot exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} \cdot \varphi_1(\tau)d\tau +$$
$$+\int_0^t \sqrt{\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left[1 - exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right] \cdot \varphi_1(\tau)d\tau \tag{8}$$
түріне келеді. Осыдан кейін келесі ауыстырулар жасаймыз:
$$t = \frac{1}{t_1}; \tau = \frac{1}{\tau_1}; \varphi_1\left(\frac{1}{t_1}\right) = \psi(t_1). \tag{9}$$
Сонда теңдеуіміз келесі түрде жазылады:
$$\psi(t_1) = \int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{\pi}(\tau_1 - t_1)^{\frac{3}{2}}} \cdot exp\left\{-\frac{1}{a^2(\tau_1 - t_1)}\right\} \cdot \psi(\tau_1)d\tau_1 +$$
$$+\int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(\tau_1 - t_1)}} \cdot \left[1 - exp\left\{-\frac{1}{a^2(\tau_1 - t_1)}\right\}\right] \cdot \frac{1}{\tau_1}\psi(\tau_1)d\tau_1. \tag{10}$$
Лаплас түрлендіруін қолданамыз [6]
$$\widehat{\psi}(p) = e^{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}} \cdot \widehat{\psi}(p) + \frac{1}{2a\sqrt{-p}}\left[1 - e^{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}}\right] \cdot \int_0^p \widehat{\psi}(q)dq + \widehat{F_1}(p). \tag{11}$$
Енді $\int_0^p \widehat{\psi}(q)dq = \Psi(p)$ белгілеуін енгізсек, яғни $\psi(p) = \dfrac{d\Psi(p)}{dp}$, онда алатынымыз
$$\left[1 - e^{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}}\right]\frac{d\Psi(p)}{dp} - \left[1 - e^{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}}\right] \cdot \frac{1}{2a\sqrt{-p}} \cdot \Psi(p) = \widehat{F_1}(p);$$
$$\frac{d\Psi(p)}{dp} - \frac{1}{2a\sqrt{-p}}\Psi(p) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}}} \cdot \widehat{F_1}(p)$$
немесе
$$\frac{d\Psi(p)}{dp} - \frac{1}{2a\sqrt{-p}}\Psi(p) = \widehat{F_1}(p) + \frac{e^{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}}}{1 - e^{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}}} \cdot \widehat{F_1}(p),$$
$$\Psi(p) = e^{-\frac{\sqrt{-p}}{a}}\left[C + \int_0^p \frac{e^{-\frac{\sqrt{-q}}{a}}}{1 - e^{-\frac{2}{a}\sqrt{-q}}}\widehat{F_1}(q)dq\right]. \tag{12}$$
Біртекті интегралдық теңдеудің шешімін табамыз, яғни

$$f(t) = 0.$$

$$\widehat{\Psi}(p) = C \cdot e^{-\frac{\sqrt{-p}}{a}}\,(c{=}const),$$

$$\widehat{\psi(p)} = \widehat{\Psi}'(p) = -C \cdot \frac{1}{2a\sqrt{-p}} e^{-\frac{\sqrt{-p}}{a}}.$$

Енді функцияның түпнұсқасын табамыз [7]

$$g\left(\frac{1}{t}\right) \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{p}} \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{q}} J_1(2\sqrt{q \cdot p})\widehat{g}(q)dq,$$

мұндағы $g(t) \risingdotseq \widehat{g}(q)$; $J_1(z)$ — Бессель функциясы.

$$\widehat{\varphi_1}(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot J_1(2\sqrt{qp}) \cdot \frac{1}{2a\sqrt{q}} \cdot e^{-\frac{\sqrt{q}}{a}} dq =$$

$$= \|\sqrt{q} = \frac{\xi}{2\sqrt{p}}\| = \frac{1}{a\sqrt{p}} \int\limits_0^\infty \frac{1}{\xi} \cdot J_1(\xi) e^{-\dfrac{\xi}{2a\sqrt{p}}} d\xi = F\left(\frac{1}{2}; 1; 2, -4a^2 p\right),$$

мұндағы F — гипергеометриялық функция. Біздің жағдайымызда F гипергеометриялық функцияның қасиеті бойынша [8]

$$F\left(\frac{1}{2}; 1; 2, -4a^2 p\right) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4a^2 p}}.$$

Бұл бейненің түпнұсқасы келесіге тең:

$$\sqrt{\pi}\left[-\frac{1}{a} e^{-\frac{t}{4a^2}} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{2a} e^{\frac{t}{4a^2}} \cdot erfc\left(-\frac{\sqrt{t}}{2a}\right)\right\}\right] =$$

$$= -\frac{1}{a}\left[\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{4a^2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot erfc\left(-\frac{\sqrt{t}}{2a}\right)\right].$$

Осылайша, алғашқы біртекті (3) интегралдық теңдеудің жалпы шешімі келесі түрде болады:

$$\varphi_0(t) = C\left\{\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{4a^2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} erf\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\right\}. \tag{13}$$

(1)–(2) біртекті шеттік есептің шешімі келесі түрде болатындығын көрсете аламыз:

$$u(x,t) = C \cdot \int\limits_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{\frac{x+t}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} exp\left[-\frac{(x+t)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] + \frac{x-\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \cdot exp\left[-\frac{(x-t)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\} \varphi_0(\tau)d\tau,$$

мұндағы $\varphi_0(t)$ (13) қатынасынан табылады.

Сонымен,

$$u_t(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = \lambda u(x,t);$$

$$\{x,t\} \in G = \{t > 0, 0 < x < t\};$$

$$u(x,t)|_{x=0} = 0, t > 0;$$

$$u(x,t)|_{x=t} = 0, t > 0$$

спектрлі есебі үшін біз келесі теоремалар орындалатындығын дәлелдедік.

Теорема 1. Берілген спектрлі есептің $\lambda_0 = 0$ меншікті мәні және $u_{hot}(x,t)$ меншікті функциясы бар, сонымен қоса

$$[\gamma(x,t)]^{-1} \cdot u_{hot}(x,t) \in L_\infty(G), \gamma(x,t) \geq 1,$$

$$\gamma = \max\left[\frac{\sqrt{t}}{t-x} exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2t}\right\}; exp\left\{\frac{t-x}{a^2}\right\}\right].$$

Теорема 2. Жалғыздық класы:

$$[\gamma_\varepsilon(x,t)]^{-1} \cdot u(x,t) \in L_\infty(G), \gamma_\varepsilon(x,t) \geq 1,$$

мұндағы

$$\gamma_\varepsilon = \max\left[\left(\frac{\sqrt{t}}{t-x}\right)^{1-\varepsilon} \cdot exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2t}\right\}; exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)(t-x)}{a^2}\right\}\right], \varepsilon > 0.$$

Алғашқы шеттік есептің шешімі

Енді біз $G = \{(x,t) : t > 0, 0 < x < t\}$ облысында

$$u(x,t)\,|_{x=0} = v(t), u(x,t)\,|_{x=t} = w(t)$$

шекаралық шарттарын қанағаттандыратын

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімін табуымыз қажет. Шешімді айқын түрде жазайық. $v(t)$ және $w(t)$ шарттанын қолданып, (1)–(2) бірінші шеттік есептің шешімін айқын түрде көрсетейік:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \nu(\tau)d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x-\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau)d\tau, \tag{14}$$

мұндағы

$$\nu(t) = 2a^2 v(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau)d\tau. \tag{15}$$

(14) мәнін (15) теңдеуге қоямыз

$$u(x,t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \cdot v(\tau)d\tau + J_1(x,t) + J_2(x,t),$$

мұндағы

$$J_2(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x-\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau)d\tau.$$

$J_1(x,t)$ есептейік:

$$J_1(x,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^2}\int\limits_0^t\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^\tau\frac{\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\tau_1^2}{4a^2(\tau-\tau_1)}\right\}\cdot\varphi(\tau_1)d\tau_1\right]d\tau=$$

$$=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^2}\int\limits_0^t\varphi(\tau_1)d\tau_1\cdot\int\limits_{\tau_1}^t\frac{x\tau_1}{[(t-\tau)(\tau-\tau_1)]^{3/2}}\exp\left\{-\frac{1}{4a^2}\left[\frac{x^2}{t-\tau}+\frac{\tau_1^2}{\tau-\tau_1}\right]\right\}d\tau=$$

$$=\|\sqrt{\frac{t-\tau}{\tau-\tau_1}}=z\|=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^2}\int\limits_0^t\varphi(\tau_1)\left\{e^{-\frac{x^2+\tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)}}\right\}d\tau_1\int\limits_0^\infty\frac{2x\tau_1}{(t-\tau_1)^2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau_1)}\cdot\frac{1}{z^2}-\frac{\tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)}\cdot z^2\right\}d\tau=$$

$$=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^2}\int\limits_0^t\varphi(\tau_1)\frac{2x\tau_1}{(t-\tau_1)^2}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{2a\sqrt{t-\tau_1}}{\tau_1}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{2a\sqrt{t-\tau_1}}{x}\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-2\frac{x\tau_1}{4a^2(t-\tau_1)}-\frac{x^2+\tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)}\right\}d\tau_1=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{x+\tau_1}{(t-\tau_1)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x+\tau_1)^2}{4a^2(t-\tau_1)}\right\}\varphi(\tau_1)d\tau_1.$$

Осылайша, (1), (2) теңдеудің шешімі келесі түрде болады:

$$u(x,t)=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}v(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\left\{\frac{x+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}}+\frac{x-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right\}\varphi(\tau)d\tau,$$

мұндағы

$$\varphi(t)=f(t)+\int\limits_0^t R(t,\tau)exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}f(\tau)d\tau+C\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{t}{4a^2}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}erf\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\right\},$$

$$f(t)=-2a^2\left[w(t)-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{t}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}exp\left\{-\frac{t^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}v(\tau)d\tau\right],$$

ал

$$R(t,\tau)=\frac{t}{a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=1}^\infty n\cdot exp\left\{-\frac{n^2t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}+\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}+$$

$$+\frac{1}{2a^2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{t-\tau}}exp\left\{-\frac{n^2\tau t}{a^2(t-\tau)}\right\}+\pi n\cdot exp\left\{-\frac{\tau n^2}{a^2}\right\}erfc\left(\frac{n\tau}{a\sqrt{t-\tau}}\right)\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}exp\left(\frac{t-\tau}{4a^2}\right)\left\{1+erf\left(\frac{\sqrt{t-\tau}}{2a}\right)\right\}+$$

$$+\int_{\tau}^{t}\{\frac{\tau_1}{2a^2(\tau_1-\tau)^{3/2}}exp\left(\frac{t-\tau_1}{4a^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot exp\left\{-\frac{n^2\tau_1\tau}{a^2(\tau_1-\tau)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{4a^2\sqrt{\tau_1-\tau}}exp\left(\frac{t-\tau_1}{4a^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}exp\left\{-\frac{n^2\tau_1\tau}{a^2(\tau_1-\tau)}\right\}+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}exp\left(\frac{t-\tau_1}{4a^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot exp\left\{-\frac{\tau n^2}{a^2}\right\}erfc\left(\frac{n\tau}{a\sqrt{\tau_1-\tau}}\right)\}d\tau_1.$$

Әдебиеттер тізімі

1 *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1990. — 724 с.

2 *Dzhenaliyev M.T., Kalantarov V.K., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I.* On the second boundary value problem for the equation of heat conduction in an unbounded plane angle // Bull. of Karaganda University. Ser. Mathematics. — 2014. — No. 4 (76). — P. 47–56.

3 *Jenaliyev M.T., Amangaliyeva M.M., Kosmakova M.T.* On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel // Journal calculated. Mat. and Math. Physics. — 1978. — Vol. 18. — No. 6. — P. 1139–1145.

4 *Амангалиева М.М., Дженалиев М.Т.,Космакова М.Т., Рамазанов М.И.* О задаче Дирихле для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2013. — Т. 15. — № 2. — С. 9–24.

5 *Amangalieva M.M., Dzhenaliev M.T., Kostmakova M.T.* On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain // Siberian Mathematical Journal. — 2015. — Vol. 56. — No. 6. — P. 982–995.

6 *Диткин В.А., Прудников А.П.* Операционные исчисления. — М.: ВИНИТИ, 1966.

7 *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Интегральные уравнения. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 192 с.

8 *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. — Т. 2. — М.: Физматлит, 2003. — 664 с.

М.Т.Дженалиев, М.И.Рамазанов, А.К.Жанболова

К решению сингулярного интегрального уравнения Вольтерра тепловой задачи с равномерно движущейся границей

Краевые задачи уравнения теплопроводности в областях с движущимися во времени границами приобретают большое практическое значение. Так, например, решение вопросов, связанных с теорией роста кристаллов, термикой нефтяных пластов, проблемой теплового удара концентрированными потоками энергии, с процессами горения в слое горючего материала, сводится к решению задач с движущейся границей. Общий метод решения подобного рода задач при произвольном законе движения границ области основан на теории тепловых потенциалов простого и двойного слоя, который приводит к необходимости решения интегральных уравнений типа Вольтерры второго рода. В данной работе рассмотрено сингулярное интегральное уравнение типа Вольтерры с движущейся границей.

M.T. Jenaliyev, M.I.Ramazanov, A.K.Zhanbolova

The solution of the singular Volterra integral equation of the thermal problem with a uniformly moving boundary

Boundary value problems the heat equation in domains with moving through time boundaries are becoming of great practical importance. For example, the addressing: with the theory of crystal growth, thermal oil reservoir, the problem of heat stroke by the concentrated streams of energy, the combustion layer of combustible material is reduced to the solution of problems with moving boundary. A General method of solving such kind of problems by the arbitrary law of motion of region bounds based on the theory of heat potentials simple and double layers, which leads to the solution of integral equations of type Volterra of the second kind.

References

1 Tikhonov A.N., Samarskyi A.A. *Equations of mathematical physics*, Moscow: Nauka, 1990, 724 p.

2 Dzhenaliyev M.T., Kalantarov V.K., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. *Bull. of the Karaganda University*, Ser. Mathematics, 2014, 4 (76), p. 47–56

3 Jenaliyev M.T., Amangaliyeva M.M., Kosmakova M.T. *Journal calculated. Mat. and Math. Physics*, 1978, 18, 6, p. 1139–1145.

4 Amangalieva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. *Reports Adyghe Circassian, International Academy of Sciences,* 2013, 15, 2, p. 9–24.

5 Amangalieva M.M, Dzhenaliev M.T., Kosmakova M.T. *Siberian Mathematical Journal*, 2015, 56, 6, p. 982–995.

6 Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Operational calculus*, Moscow: VINITI, 1966.

7 Krasnov M.L., Kiselev A.I., Makarenko G.I. *Integral Equations*, Moscow: Editorial URSS,2003, 192 p.

8 Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integrals and Series*, 2, Moscow: Fizmatlit, 2003, 664 p.