

Т.С.Григорьева, Т.В.Заикина

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

**НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
НА ОПТИМИЗАЦИЮ В КУРСЕ ПЛАНИМЕТРИИ**

*Мақалада планиметриядан қолданбалы есептерді шығару әдістемесі көрсетілген. Берілген есептер мектеп оқушыларының геометриядан білімдерін кең және терең қылуға жағдай жасайды.*

*In the article methodical approaches to the decision of applied problems on the geometry are specified. Decisions of these problems are used for realisation of the various educational purposes. These problems promote expansion and deepening of geometrical knowledge of pupils.*

В прикладной направленности математики большую роль призвана сыграть геометрия. Однако в преподавании геометрии недостаточно используются возможности применения геометрического материала к решению прикладных задач. Поэтому целесообразно при обучении геометрии включать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений уже в 7-м классе [1]. Такое раннее введение задач на максимум и минимум позволит выработать у учащихся (при продолжении этой деятельности в последующих классах) умения и навыки в оценке оптимальных условий. При встрече с задачами на нахождение наибольшего и наименьшего значений учащиеся чаще всего не могут самостоятельно их решить. Здесь дело не столько в сложности данных задач, сколько в их необычности, и поэтому учащиеся испытывают затруднения при отыскании способов решения. Между тем данное затруднение можно устранить, если продумать систему подготовительных упражнений, способствующую успешному нахождению решений указанных выше задач.

Так, после изучения темы «Точка, прямая, отрезок» учащимся можно предложить следующие задачи на максимум и минимум [2–4].

**Задача 1.** На плоскости даны точки  $A$  и  $B$ . Отметьте третью точку  $C$  так, чтобы расстояние  $AB$  было не более суммы расстояний  $AC + BC$ . В каком случае эта сумма будет наименьшей?

**Решение.** Здесь прежде всего нужно довести до сознания учащихся понятие «не более», т.е. меньше или равно:  $AB \leq AC + BC$ . Кроме того, при рассмотрении с учащимися неравенства  $AC + BC \geq AB$  выясняется, что сумма расстояний всегда будет больше  $AB$ , если точка  $C$  не лежит на прямой  $AB$ . И только в том случае, когда эта точка лежит на прямой  $AB$ , рассматриваемая сумма расстояний будет равна  $AB$ , т.е. будет наименьшей.

**Задача 2.** На плоскости даны точки  $A$  и  $B$ . Отметьте третью точку  $C$  так, чтобы расстояние  $AB$  было не меньше разности расстояний  $AC - BC$ . В каком случае эта разность будет наибольшей?

**Решение.** Здесь доводится до сознания учащихся понятие «не менее», т.е. больше или равно:  $AB \geq AC - BC$ . Кроме того, при анализе неравенства  $AC - BC \leq AB$  устанавливается, что разность будет наибольшей при  $AC - BC = AB$ .

После решения задач такого типа можно предложить учащимся для самостоятельного решения следующие задачи.

**Задача 3.** О трех различных точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  известно, что  $AB = 8$  см,  $BC = 6$  см. Расположите эти точки так, чтобы расстояние  $AC$  оказалось: а) наименьшим; б) наибольшим.

**Задача 4.** Дана прямая  $MK$  и две точки  $A$  и  $B$ , лежащие по разные стороны от нее. Укажите на этой прямой такую точку  $C$ , чтобы сумма расстояний  $AC + BC$  была наименьшей.

При дальнейшем изучении курса геометрии тематика задач, связанных с геометрическими понятиями, расширяется, и изменяются методические подходы к решению задач.

Прежде чем приступить к решению геометрических задач, нужно хорошо изучить ее условие, выполнить рисунки и найти связь между элементами фигуры. Но экстремальные задачи имеют свои особенности. Изучая условие задачи, ученик должен сосредоточить внимание на элементах, которые изменяют и не изменяют своих размеров при переходе от одной фигуры к другой, выявить постоянную длину отрезков, изменение величин углов, площади, формы фигуры, длины отрезков при постоянной величине углов, величины углов при постоянной длине отрезков. Установив зависимость между данными и искомыми элементами фигуры, нужно:

а) выделить все те фигуры, среди которых находится экстремальная фигура. Для этого необходимо опираться на свойства фигур, изображенных на рисунке, и выбрать из них те, которые помогут решить задачу;

б) найти методический прием, с помощью которого можно было бы из определенных фигур найти искомую, обладающую экстремальными свойствами.

Так, по теме «Четырехугольники» может быть рассмотрена такая задача оптимизации.

**Задача 5.** Четыре здания расположены в вершинах четырехугольного участка земли. В каком месте этого участка нужно копать колодец, чтобы сумма расстояний от каждого здания до колодца была наименьшей?

*Решение* (рис. 1).

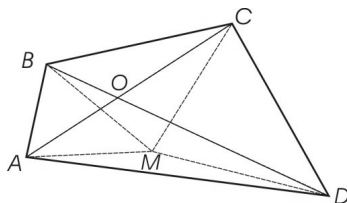


Рис. 1

Пусть точка  $O$  — точка пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ , а точка  $M$  лежит внутри этого четырехугольника. Тогда

$$OB + OD + OA + OC = BD + AC. \quad BM + MD \geq BD, \quad AM + MC \geq AC, \quad \text{т.е.}$$

$$BM + MD + AM + MC \geq BD + AC \quad \text{и}$$

$$\min(BM + MD + AM + MC) = BD + AC, \quad \text{т.е. } M = O.$$

В теме «Теорема Пифагора» встречаются задачи на максимум и минимум, решение которых основывается на методе перебора (выборке на конечном множестве объектов). Этот метод не является универсальным, так как при решении задач этим методом рассматривается конечное множество фигур или фигура с размерами, выраженными натуральными числами. Тем не менее роль этого метода очень важна, он прививает практические навыки учащимся, развивает потребность в нахождении оптимального результата.

**Задача 6.** Построить прямоугольный треугольник с катетом 15 см. Какими натуральными числами должны выражаться стороны, чтобы периметр треугольника был минимальным?

*Решение.* Если приступить непосредственно к построению искомого прямоугольного треугольника, упуская из виду заключительное условие задачи, учащиеся справедливо замечают, что задача не имеет решения, так как по одной стороне нельзя построить треугольник. Поэтому здесь желательно сначала разобрать с учащимися следующие вопросы:

- 1) Какими числами должны быть выражены стороны треугольника?
- 2) Как установить зависимость между сторонами прямоугольного треугольника?
- 3) Как записать эту зависимость?

Используя теорему Пифагора, решение задачи сводим к нахождению  $\min(a+c)$ , если  $c^2 - a^2 = 225$ , где  $c$  и  $a$  — натуральные числа. Метод перебора быстро приводит к ответу:  $c = 17$  см,  $b = 15$  см,  $a = 8$  см;  $P_{\min} = 8 + 15 + 17 = 40$  см.

**Задача 7.** Какую наибольшую высоту должна иметь телевизионная вышка, чтобы передачу можно было принимать в радиусе  $r = 200$  км? (Радиус Земли —  $R \approx 6380$  км)

*Решение* (рис. 2).

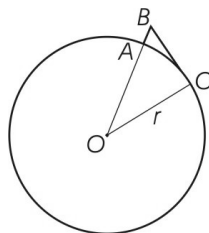


Рис. 2

Пусть высота вышки  $AB = x$ . Тогда  
 $BC = r = 200$  км;  $OC = R \approx 6380$  км;  $OB = R + x$ .

Используя теорему Пифагора, получим:

$$OB = \sqrt{R^2 + r^2} \approx 6383,1 \text{ (км)}, \text{ откуда } x = 3,1 \text{ (км)}.$$

Рассмотренные задачи решались методом оценки. Объектом оценки являлось граничное значение расстояния, величина угла. В теме «Площади» следует рассматривать задачи оптимизации, в которых объектом оценки является значение площади. В некоторых задачах вместо переменного значения расстояний или значения площади выступает значение тригонометрической функции.

**Задача 8.** Какой вид должен иметь треугольник со сторонами 10 см и 8 см, чтобы его площадь была наибольшей? Вычислите площадь такого треугольника.

**Решение.** Пусть в треугольнике  $ABC$

$AB = 10$  см,  $AC = 8$  см и  $CD = h$  ( $CD \perp AB$ ) (рис. 3).

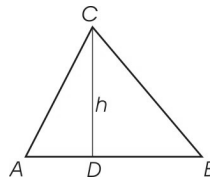


Рис. 3

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h = 5h.$$

Обратим внимание на то, что по заданным основанию  $AB = 10$  см и боковой стороне  $AC = 8$  см можно построить бесконечное множество треугольников, площади которых вычисляются по формуле  $S_{ABC} = 5h$ . Искомая (наибольшая) площадь будет при наибольшем значении  $h$ . Найдем это значение. Очевидно,  $h \leq AC$ . Следовательно, высота будет наибольшей при  $h = AC = 8$  см. Итак,  $S_{ABC} = 5 \cdot 8 = 40$  (см<sup>2</sup>) будет наибольшей, когда треугольник прямоугольный ( $AC \perp AB$ ).

**Задача 9.** Отрезок данной длины перемещается так, что концы его скользят по сторонам прямого угла. При каком положении этого отрезка площадь отсекаемого треугольника будет наибольшей?

**Решение.** Пусть данный «скользящий» отрезок в некоторый момент занимает положение отрезка  $AB$  (рис. 4).

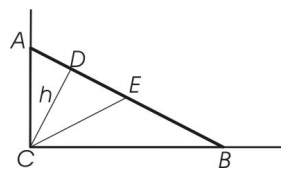


Рис. 4

Построим  $CD \perp AB$ . Вершину  $C$  треугольника соединим с серединой гипотенузы — точкой  $E$ . Тогда  $CE = \frac{1}{2} AB$ . Если  $CD = h$ , то  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h$ . Но  $h \leq CE$ , и при  $h = CE$  высота, а следовательно, и площадь треугольника  $ABC$ , будет наибольшей.

Итак, площадь отсекаемого треугольника будет наибольшей, когда высота  $CD$  совпадает с медианой  $CE$ , т.е. когда треугольник  $ABC$  равнобедренный, в таком случае его площадь

$$S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot AB^2.$$

**Задача 10.** Дан треугольник. Постройте равновеликую ему трапецию.

**Решение** этой задачи сводится к следующему. Пусть в треугольнике  $ABC$   $KD$  — средняя линия (рис. 5).

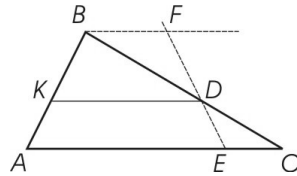


Рис. 5

Проведем  $BF \parallel AC$  и через точку  $D$  прямую  $FE$ . Образовавшаяся при этом трапеция  $ABFE$  равновелика треугольнику  $ABC$ , так как у них средняя линия и высота общие.

При решении этой задачи целесообразно использовать два следствия, которые обязательно должны быть рассмотрены при выводе формул площади треугольника и трапеции:

- 1) площадь треугольника равна произведению средней линии на высоту;
- 2) площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.

**Задача 11.** Через точку  $E$ , расположенную внутри угла  $BAC$ , проведите прямую линию так, чтобы она от угла  $BAC$  отсекала треугольник наименьшей площади.

*Решение* (рис. 6).

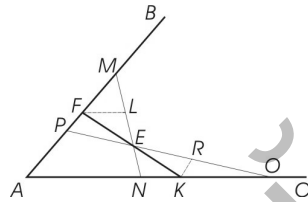


Рис. 6

Пусть  $MN$  и  $PO$  — две произвольные прямые, проходящие через точку  $E$  и пересекающие обе стороны угла  $BAC$ . Отложим на  $MN$  отрезок  $EL$  так, чтобы  $EL = EN$ , проведем  $FL \parallel AC$ .  $FL$  пересекает  $AC$  в точке  $K$ . Тогда  $\triangle FLE = \triangle ENK$  и, следовательно,  $FE = EK$ .

Теперь докажем, что площадь треугольника  $AFK$  меньше площади треугольника  $AMN$  или треугольника  $APO$ .

Треугольник  $AFK$  и трапеция  $AFLN$  равновелики (предыдущая задача). Трапеция  $AFLN$  является частью треугольника  $AMN$ , поэтому  $S_{AFLN} < S_{AMN}$  и  $S_{AFK} < S_{AMN}$ . Проведем  $KR \parallel AB$ ,  $S_{APRK} = S_{AFK}$ , так как  $\triangle FPE = \triangle RKE$ . Трапеция  $APRK$  — часть треугольника  $APO$ , следовательно,  $S_{APRK} < S_{APO}$  и  $S_{AFK} < S_{APO}$ .

Итак, прямая, проходящая через точку  $E$ , отсекает от угла  $BAC$  треугольник наименьшей площади в том случае, когда отрезок ее, заключенный между сторонами угла, делится этой точкой пополам.

Эту задачу можно решить несколько иначе:

$$S_{AMN} = S_{AFK} + S_{FEL} + S_{FML} - S_{NEK}.$$

Но  $S_{FEL} = S_{NEK}$ , так как  $\triangle FEL = \triangle NEK$ . Следовательно,

$$S_{AMN} = S_{AFK} + S_{NEK} + S_{FML} - S_{NEK} = S_{AFK} + S_{FML}, \text{ т.е. } S_{AMN} > S_{AFK}.$$

Аналогично доказывается, что  $S_{APO} > S_{AFK}$ .

**Задача 12.** Через точку  $E$  проведите прямую так, чтобы она пересекала параллельные лучи  $BA$  и  $CD$  и отсекала бы фигуру наименьшей площади.

*Решение* (рис.7).

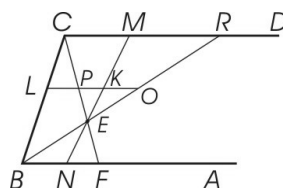


Рис. 7

Через точку  $E$  проведем прямые  $BR$ ,  $CF$  и  $MN$ . Середину отрезка  $BC$  (точку  $L$ ) соединим с серединой отрезка  $BR$  (точкой  $O$ ). Образовавшиеся треугольники  $BCF$ ,  $BCR$  и трапеция  $BCMN$  имеют одну и ту же высоту. Поэтому площадь той из этих фигур меньше, средняя линия которой меньше. Но  $LP < LK < LO$ , поэтому  $S_{BCF} < S_{BCMN} < S_{BCR}$ .

Итак, прямая  $CF$  отсекает фигуру наименьшей площади.

Рассмотренное нами решение позволяет сделать другой вывод: прямая  $BR$  отсекает фигуру наибольшей площади. В связи с этим данную задачу полезно предложить учащимся в такой редакции: через точку  $E$  (рис. 7) проведите прямую так, чтобы она пересекала параллельные лучи  $BA$  и  $CD$  и отсекала бы фигуру: а) наименьшей площади, б) наибольшей площади.

С учащимися полезно рассмотреть три возможных случая расположения точки  $E$  относительно лучей: а) точка  $E$  ближе к лучу  $BA$ , б) точка  $E$  ближе к лучу  $CD$  и в) эта точка равноудалена от лучей  $BA$  и  $CD$ . Особое внимание следует уделить третьему случаю, при котором задача не имеет решения, так как прямые, о которых говорится в задаче, будут отсекал фигуры одинаковых площадей.

В некоторых случаях для нахождения наибольшего или наименьшего значения при решении геометрической задачи трудно или невозможно заметить граничные значения переменной величины, которая нас интересует. Тогда удобно эту переменную выразить через другие величины, среди которых есть переменная, граничное значение которой хорошо известно или его легко заметить.

Рассмотрим пример такой задачи.

**Задача 13.** Докажите, что среди всех параллелограммов с данными диагоналями наибольшую площадь имеет ромб.

*Решение* (рис. 8).

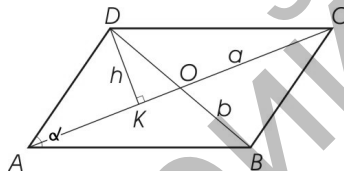


Рис. 8

Пусть данные диагонали параллелограмма равны  $a$  и  $b$ . Граничное значение переменной площади  $S$  параллелограмма  $ABCD$  непосредственно заметить трудно. Но если эту переменную площадь выразить формулой  $S = AC \cdot DK = a \cdot h$ , то легко заметить, что  $S = ah \leq \frac{1}{2}ab$ , так как  $h \leq \frac{b}{2}$ .

$$S_{\max} = \frac{1}{2}ab.$$

Если использовать формулу  $S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$ , то наибольшую площадь  $S$  нетрудно найти, используя граничное значение  $\sin \alpha$  ( $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ ).

Итак,  $S_{\max} = \frac{1}{2}ab$  ( $\sin \alpha = 1$ ), т.е.  $ABCD$  — ромб.

При решении задач на построение часто возникает необходимость в исследовании, когда нужно оценить данные в условии величины, чтобы выяснить существование решения.

Покажем это конкретно на примере задачи на построение.

**Задача 14.** Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе  $c$  и высоте  $h_c$ .

*Решение.* Будем считать, что построение выполнено и такой треугольник построен (рис. 9).

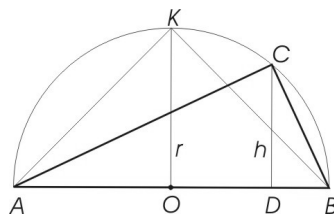


Рис. 9

Остается исследовать допустимые значения данных величин. Условие возможности допустимых значений выражается следующим соотношением:

$$OK = r \geq CD \Rightarrow \frac{1}{2} AB \geq h \Rightarrow \frac{1}{2} c \geq h \Rightarrow h_{\max} = \frac{1}{2} c \text{ и } c_{\min} = 2h.$$

Итог исследования решения задачи приводит к утверждениям:

- 1) из всех прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой:
  - а) наибольшую высоту, опущенную на гипотенузу, имеет равнобедренный треугольник;
  - б) наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник;
- 2) из всех прямоугольных треугольников с заданной высотой наименьшую гипотенузу имеет равнобедренный треугольник.

Таким образом, методический прием решения задачи создал возможность сформулировать три утверждения, т.е. решить четыре задачи вместо одной.

Аналогично, решая задачу: «Построить треугольник по стороне  $a$ , противолежащему углу  $\alpha$  и медиане  $m_a$ , проведенной к этой стороне», можно сформулировать такой вывод:

из всех треугольников, имеющих постоянные  $a$  и  $\alpha$ , равнобедренный треугольник имеет:

- а) наибольшую медиану, если  $\alpha < 90^\circ$ ;
- б) наибольшую высоту;
- в) наибольшую площадь;
- г) наибольшую биссектрису;
- д) наименьшую медиану, если  $\alpha > 90^\circ$ .

Таким образом, рассмотренные геометрические задачи на оптимизацию позволяют развивать интуицию учащихся, делать обоснованные выводы и впредь использовать эффективные способы решения задач. Кроме того, рассмотренная постановка экстремальных задач в школьном курсе планиметрии направлена на воспитание исследовательской культуры учащихся. Все решения таких задач предлагаются на уровне исследования математической модели и на уровне исследования реальной ситуации с использованием оптимизационных средств.

#### Список литературы

4. Готман Э.Г. Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений // Математика в школе. — 1979. — № 2. — С. 26–28.
5. Готман Э.Г. Несколько задач на максимум и минимум // Математика в школе. — 1965. — № 1. — С. 19–22.
6. Мостовой А.И. К решению геометрических задач в VII классе // Математика в школе. — 1974. — № 1. — С. 34–37.
7. Цыганова Н.Я. Геометрические задачи на максимум и минимум // Сб. ст. по вопросам преподавания геометрии в СШ / Ред. П.В.Стратилатов. — М.: Учпедгиз, 1958. — 154 с.