12. *Prohorkin S.F., Kulibanov V.S.* Network activity in building management. — L.: Lenizdat, 1974. — 184 p.
13. *Ivasenko A.G., Nikonova J.I., Sizov A.O.* Innovative management: the Manual. — M.: KNORUS, 2009. — P. 201.
14. *Berezina L.U.* Graphs and their application: the Manual for teachers. — M.: Nauka, 1979. — 143 p.
15. *Harari F.* Graph theory: trans. from English. — M.: World, 1973. — 300 p.
16. *Kristofides N.* Graph theory. The algorithmic approach / Trans. from English. — M.: the Mir, 1978. — 432 p.

УДК 517.51

Теорема Боаса для обобщенного пространства Лоренца $\Lambda_p(\omega)$

Boas theorem for generalized Lorentz spaces $\Lambda_p(\omega)$

Копежанова А.Н., Нурсултанов Е.Д.

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (E-mail: Kopezhanova@yandex.ru)

$\lambda_p(\omega)$ дискретті жалпыланған Лоренц кеңістігіндегі Фурье коэффициенттері үшін функциялардың регулярлық жүйесі бойынша ортогоналдық қатарлардың интегралдық қасиеттері зерттеледі. $\Lambda_p(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістіктерінде Боас теоремасы, $\Lambda_p(\omega)$ кеңістігі үшін Харди-Литтлвуд түріндегі жаңа теңсіздіктер алынды.

The integral properties of orthogonal series both for the regular system and for the Fourier coefficients of the discrete generalized Lorentz spaces $\lambda_p(\omega)$ are studied. Boas theorem for the generalized Lorentz spaces $\Lambda_p(\omega)$ is obtained. Besides, in given work are received new inequality of the type Hardi-Littlvud for space $\Lambda_p(\omega)$.

Хорошо известна теорема Харди-Литтлвуда (см. [1, 2]).

Теорема А. Пусть $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$. Если $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — монотонно невозрастающая, стремящаяся к нулю последовательность, $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \pi kx$, то для того, чтобы $f \in L_p[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} \, | a_k |^p < \infty. \tag{1}$$

Этот результат обобщен на пространство Лоренца и более общие симметричные пространства в работах [3–7]. А в 1974 году Л.-Е.Перссон, обобщил для более общих пространств Лоренца $\Lambda_p(\omega)$ когда $\Phi = \{e^{2\pi ikx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ – тригонометрическая система (см. [8–11]).

Теорема В. Пусть $p > 0$, $\Phi = \{e^{2\pi int}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ – тригонометрическая система и ω — неотрицательная функция на $[0,\infty)$. Если существует $\delta > 0$, удовлетворяющее условиям: $\omega(t)t^{-\delta}$ – возрастающая функция и $\omega(t)t^{-1+\delta}$ – убывающая функция, и если $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \to 0$ и $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos 2\pi nx$, то для того, чтобы $\left(\int_0^1 \left(f^*(t) t \omega\left(\frac{1}{t}\right)\right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^* \omega(n))^p \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, где $\{a_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ – невозрастающая перестановка последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – коэффициентов Фурье функции f по системе Φ.

Некоторые результаты, связанные с теоремой Харди-Литтлвуда о коэффициентах Фурье с весами, были получены в [12–16].

Боасом было получен критерий принадлежности монотонной функции f пространству $L_{p,q}$ в терминах тригонометрических коэффициентов Фурье [17].

Теорема C. Если $f \geq 0$ и f убывающая, $1 < p < \infty$ и $1 < q < \infty$, тогда для того, чтобы $f \in L_{q,p}$, необходимо и достаточно, чтобы $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_{q',p}$ (см. [8–11]).

Теорема D. Пусть $p > 0$, $\Phi = \{e^{2\pi int}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ – тригонометрическая система и ω – неотрицательная функция на $[0,\infty)$. Если существует $\delta > 0$, удовлетворяющее условиям: $\omega(t)t^{-\delta}$ – возрастающая функция и $\omega(t)t^{-1+\delta}$ – убывающая функция, и если f – неотрицательная и неубывающая на $[0,\frac{1}{2}]$, тогда для того, чтобы $\left(\int_0^1 \left(f^*(t)t\omega\left(\frac{1}{t}\right)\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ необходимо и достаточно, чтобы $\left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^* \omega(n))^p \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, где $\{a_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ – невозрастающая перестановка последовательности $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ – коэффициентов Фурье функции f по системе Φ.

Основной целью данной работы является получение теоремы Боаса для обобщенного пространства Лоренца $\Lambda_p(\omega)$ по регулярной системе функций. Кроме того, в данной работе получены новые неравенства типа Харди-Литтлвуда для пространства $\Lambda_p(\omega)$.

Пусть $0 < p \leq \infty$ и ω — неотрицательная функция на $[0,1]$. Обобщенные пространства Лоренца $\Lambda_p(\omega)$ — это пространства всех измеримых функций f на $[0,1]$, таких что если $0 < p < \infty$, то

$$\|f\|_{\Lambda_p(\omega)} = \left(\int_0^1 \left(f^*(t)\omega(t)\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ если } p = \infty, \text{ то } \|f\|_{\Lambda_\infty(\omega)} = \sup_{t>0} f^*(t)\omega(t) < \infty,$$

где f^* – невозрастающая перестановка функций f. В случае $\omega(t) = t^{\frac{1}{q}}$ при $1 < q < \infty$ пространства $\Lambda_p(\omega)$ совпадают с классическими пространствами $L_{q,p}$ [18, 19].

Пусть f — периодическая функция с периодом 1 и интегрируемая на $[0,1]$ и $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система. Числа $a_n = a_n(f) = \int_0^1 f(x)\overline{\varphi_n(x)}d\mu$, $n \in \mathbb{N}$ называются коэффициентами Фурье функции f по системе $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть $\delta > 0$, $\omega(t)$ — неотрицательная функция на $[0,1]$. Определим класс A следующим образом: $A_\delta = (\omega(t)$: $\omega(t)t^{-\delta}$ — возрастающая функция; $\omega(t)t^{-1+\delta}$ — убывающая функция). Тогда класс A определяется как $A = \bigcup_{\delta>0} A_\delta$.

Ортонормированную систему $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ назовем регулярной, если существует константа B, что

1) для любого отрезка e из $[0,1]$ и $k \in N$ верно $\left|\int_e \varphi_k(x)dx\right| \leq B\min(|e|,1/k)$;

2) для любого отрезка w из N и $t \in [0,1]$ $\left(\sum_{k\in w} \varphi_k(\cdot)\right)^*(t) \leq B\min(|w|,1/t)$,

где $\left(\sum_{k\in w} \varphi_k(\cdot)\right)^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $\sum_{k\in w} \varphi_k(x)$ [20].

Примерами регулярной системы являются все тригонометрические системы, система Уолша и система Прайса и др.

Для доказательства основного результата нам необходима следующая техническая лемма

Лемма 1. Пусть $1 \le \mathrm{q} \le \infty$ и $1 \le \mathrm{h} \le \infty$. Если $\omega(t)$ принадлежит классу A, тогда для любой невозрастающей функции f

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \left(f(t)\omega(t) \right)^h \frac{dt}{t} \right)^{\frac{q}{h}} \right)^{\frac{1}{q}} \sim \left(\int_0^1 \left(f(t)\omega(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2}$$

Доказательство. Докажем сначала следующее:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \left(f(t)\omega(t) \right)^h \frac{dt}{t} \right)^{\frac{q}{h}} \right)^{\frac{1}{q}} \sim \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(f(2^{-k})\omega(2^{-k}) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3}$$

$$I_h := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \left(f(t)\omega(t) \right)^h \frac{dt}{t} \right)^{\frac{q}{h}} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \left(f(t)\omega(t)t^{-1+\delta}t^{1-\delta} \right)^h \frac{dt}{t} \right)^{\frac{q}{h}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Учитывая $\omega(t) \in D$, это означает, что существует такая $\delta, 0 < \delta < 1$, что $\omega(t)t^{-\delta}$ – возрастающая функция, а $\omega(t)t^{-1+\delta}$ – убывающая функция, тогда получим следующие оценки:

$$I_k \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(f(2^{-k}\omega(2^{-k})2^{-k(-1+\delta)} \left(\int_{2^{-л}}^{2^{-л+1}} t^{(1-\delta)h} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{h}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(f(2^{-k})\omega(2^{-k})2^{k-k\delta}2^{k\delta-k} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = c_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(f(2^{-k})\omega(2^{-k}) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \times$$

и

$$\times I_h = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \left(f(t)\omega(t)t^{-\delta}t^{\delta} \right)^h \frac{dt}{t} \right)^{\frac{q}{h}} \right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(f(2^{-k+1})\omega(2^{-k+1})2^{-(-k+1)\delta} \left(\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} t^{\delta-1} dt \right)^{\frac{1}{h}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(f(2^{-k+1})\omega(2^{-k+1}) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} c_3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(f(2^{-k})\omega(2^{-k}) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом, (3) доказано. Доказанное, в частности, означает, что для всех h_1 и h_2 $I_{h_1} \approx I_{h_2}$.

Кроме того, так как $I \equiv \left(\int_0^1 \left(f(t)\omega(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$, где $h = 1$, в частности, следует (2). Лемма доказана.

В работе [21] (также см. [20]) получено неравенство типа Харди-Литтлвуда по регулярной системе.

Если $1 < p < \infty$, то

$$\left\| \overline{f} \right\|_{L_p\left[0,1\right]}^p \le C \sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} \, | \, a_k \, |^p, \tag{4}$$

где $\overline{f} = \frac{1}{t} \left| \int_0^t f(s) ds \right|$.

Теорема 1.2. Пусть $\Phi=\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — регулярная система и $f\overset{\text{п.в.}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n$. Пусть $1\le p\le\infty$ и $\omega(t)$ принадлежит классу А, тогда

$$\left(\int_0^1\left(\overline{f(t)}\omega(t)\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}\le C\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n^*\mu(n)\right)^p\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5}$$

где $\overline{f}(t)=\frac{1}{t}\left|\int_0^t f(s)ds\right|$, $\mu(n)=n\omega(\frac{1}{n})$ и C константа не зависит от f.

Доказательство. Пусть $\omega(t)$ из класса A. Это означает, что найдется такое $\delta>0$ и для $\omega(t)$ выполняется условие: $\omega(t)t^{-\delta}$ является возрастающей функцией, $\omega(t)t^{-1+\delta}$ является убывающей функцией. Пусть функция f удовлетворяет условию

$$\left(\int_0^1\left(f^*(t)\omega(t)\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

Пусть $f\overset{\text{п.в.}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n$. Для всех $t\in[0,1]$ рассмотрим

$$\left|\int_0^t f(s)ds\right|=\left|\int_0^t\sum_{k\in\mathrm{N}}c_n\varphi_n(s)ds\right|\le\sum_{n\in\mathrm{N}}|c_n|\left|\int_0^t\varphi_n(s)ds\right|.$$

По условию регулярности $\left|\int_0^t\varphi_n(s)ds\right|\le B\min\left(t,\frac{1}{n}\right)$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\left|\int_0^t\varphi_n(s)ds\right|\le B\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\min\left(t,\frac{1}{n}\right)\le B\sum_{n=1}^{\infty}c_n^*\min\left(t,\frac{1}{n}\right)\le \mathrm{B}\left(\sum_{n=1}^{\frac{1}{t}}c_n^*t+\sum_{n=\frac{1}{t}}^{\infty}c_n^*\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно,

$$\left|\int_0^t f(s)ds\right|\le B\left(\sum_{n=1}^{\frac{1}{t}}c_n^*t+\sum_{n=\frac{1}{t}}^{\infty}c_n^*\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, получим

$$\left(\int_0^1\left(\overline{f(t)}\omega(t)\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}\le B\left(\int_0^1\left(\frac{1}{t}\omega(t)\left(\sum_{n=1}^{\frac{1}{t}}c_n^*t+\sum_{n=\frac{1}{t}}^{\infty}c_n^*\frac{1}{n}\right)\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le B\left(\int_0^1\left(\omega(t)\frac{1}{t}t\sum_{n=1}^{\frac{1}{t}}c_n^*\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}+B\left(\int_0^1\left(\omega(t)\frac{1}{t}\sum_{n=\frac{1}{t}}^{\infty}c_n^*\frac{1}{n}\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}:=B\left(I_1+I_2\right).$$

Рассмотрим сначала I_1.

Пусть ε такое, что $-2+\frac{1}{p}+\delta<\varepsilon<\frac{1}{p}-1$. Так как $\omega(t)t^{-1+\delta}$ — убывающая функция, то

$$I_1=\left(\int_0^1\left(\omega(t)\sum_{n=1}^{\frac{1}{t}}c_n^*\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_0^1\left(\frac{\omega(t)t^{-1+\delta}}{t^{-1+\delta}}\sum_{n=1}^{\frac{1}{t}}c_n^*\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le\left(\int_0^1\left(t^{1-\delta}\sum_{n=1}^{\frac{1}{t}}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{-1+\delta}c_n^*\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_1^{\infty}\left(t^{-1+\delta}\sum_{n=1}^{t}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{-1+\delta}c_n^*\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}\sim$$

$$\sim\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{-1+\delta}\sum_{n=1}^{k}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{-1+\delta}c_n^*\right)^p\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Применяя неравенство Гельдера и учитывая, что $\varepsilon<\dfrac{1}{p}-1,$ получим

$$I_1\le C_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{-1+\delta}\left(\sum_{n=1}^{k}\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)n^{-\varepsilon}c_n^*\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{k}n^{(1-\delta+\varepsilon)p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^p\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}}\sim$$

$$\sim\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^{(-1+\delta)p}k^{(1-\delta+\varepsilon)p+\frac{p}{p'}}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)n^{-\varepsilon}c_n^*\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)n^{-\varepsilon}c_n^*\right)^p\sum_{k=n}^{\infty}k^{\varepsilon p+p-2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Далее, также учитывая, что $\varepsilon>-2+\dfrac{1}{p}+\delta,$ получим следующую оценку:

$$I_1\le C_2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)nc_n^*\right)^p\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}=C_2\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\mu(n)c_n^*)^p\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.\qquad(6)$$

Аналогично докажем I_2. Пусть $\dfrac{1}{p}-1<\varepsilon<\dfrac{1}{p}-\delta.$ Учитывая, что $\omega(t)t^{-\delta}$ – возрастающая функция, получим следующие оценки:

$$I_2=\left(\int_0^1\left(\omega(t)\frac{1}{t}\sum_{n=\frac{1}{t}}^{\infty}c_n^*\frac{1}{n}\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_0^1\left(\frac{\omega(t)t^{-\delta}}{t^{-\delta}}\frac{1}{t}\sum_{n=\frac{1}{t}}^{\infty}\frac{c_n^*}{n}\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le\left(\int_0^1\left(t^{-1+\delta}\sum_{n=\frac{1}{t}}^{\infty}\omega\left(\frac{1}{n}\right)n^{\delta}\frac{c_n^*}{n}\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_1^{\infty}\left(t^{1-\delta}\sum_{n=t}^{\infty}\omega\left(\frac{1}{n}\right)n^{\delta}\frac{c_n^*}{n}\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}\sim$$

$$\sim\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{1-\delta}\sum_{n=k}^{\infty}\omega\left(\frac{1}{n}\right)n^{\delta}\frac{c_n^*}{n}\right)^p\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Применим неравенство Гельдера и, используя, что $\varepsilon<\dfrac{1}{p}-\delta,$ получим

$$I_2\le \mathrm{C}_3\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{1-\delta}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\left(c_n^*\omega\left(\frac{1}{n}\right)n^{-\varepsilon}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=k}^{\infty}n^{(-1+\delta+\varepsilon)p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^p\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}}\sim$$

$$\sim\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^{\varepsilon p+p-2}\sum_{n=k}^{\infty}\left(c_n^*\omega\left(\frac{1}{n}\right)n^{-\varepsilon}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n^*\omega\left(\frac{1}{n}\right)n^{-\varepsilon}\right)^p\sum_{k=1}^{n}k^{\varepsilon p+p-2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как $\varepsilon > \frac{1}{p} - 1$, то получим следующую оценку:

$$I_2 \le C_4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^* \mu(n) \right)^p \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

Объединив полученные оценки (6) и (7), приходим к требуемой оценке. Теорема доказана.

Теорема 2.3. Пусть $f(t) \ge 0$ и f – невозрастающая функция, $1 \le p \le \infty$ и $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – регулярная система. Пусть $f \overset{\text{п.в.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$ и $\omega(t)$ принадлежит классу A. Тогда $\|f\|_{\Lambda_p(\omega)} \sim \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^* \mu(n) \right)^p \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{p}}$, где $\mu(n) = n\omega(\frac{1}{n})$.

Доказательство. Необходимую часть доказательства данной теоремы дает теорема 1. Действительно, так как f – монотонно невозрастающая функция, то для любого $t > 0$ $f(t) \le \overline{f(t)}$, поэтому

$$\left(\int_0^1 \left(f(t)\omega(t) \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_0^1 \left(\overline{f(t)}\omega(t) \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \le \mathrm{C} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^* \mu(n) \right)^p \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Докажем достаточность. Условие $\omega(t) \in D$ означает, что существует $\delta > 0$ такое, что $\omega(t)t^{-\delta}$ – возрастающая функция и $\omega(t)t^{-1+\delta}$ – убывающая функция, т.е. $\mu(n)n^{-\delta}$ – возрастающая и $\mu(n)n^{-1+\delta}$ – убывающая. Тогда верна следующая оценка:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu^p(k)}{k} \le \mathrm{C} \frac{\mu^p(n)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Действительно,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu^p(k)}{k} \le \frac{1}{n} \mu^p(n) n^{-\delta} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\delta}} \approx \frac{\mu^p(n)}{n}.$$

Далее, применяя теорему 2.4.12 (ii) в [22], получим следующее равенство:

$$\lambda_p(\mu) = \left(\lambda_{p'}(\mu^{-1} n) \right)^*, \text{ где } \quad 1 < p < \infty,$$

S^* – сопряженное пространство к пространству S. Следовательно, имеет место следующее двойственное представление нормы последовательности a из пространства $\lambda_p(\mu)$ (см. [22]):

$$\|a\|_{\lambda_p(\mu)} = \sup_{\|b\|_{\lambda_{p'}(\mu^{-1}n)}=1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Применяя равенства Парсеваля, получим

$$\|a\|_{\lambda_p(\mu)} = \sup_{\|b\|_{\lambda_{p'}(\mu^{-1}n)}=1} \int_0^1 f(t)g(t)dt = \sup_{\|b\|_{\lambda_{p'}(\mu^{-1}n)}=1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} f(t)g(t)dt \le$$

$$\le \sup_{\|b\|_{\lambda_{p'}(\mu^{-1}n)}=1} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} f(t)g(t)dt \right|. \tag{8}$$

К интегралу $\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} f(t)g(t)dt$ применим теорему о среднем, тогда найдется $\xi \in \left(2^{-k-1},\ 2^{-k} \right)$, что

$$\left| \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} f(t)g(t)dt \right| = \left| f(2^{-k-1}) \int_{2^{-k-1}}^{\xi} g(t)dt \right| = f(2^{-k-1}) \left| \int_{2^{-k-1}}^{\xi} g(t)dt \right|. \tag{9}$$

Заметим, что

$$\left| \int_{2^{-k-1}}^{\xi} g(t)dt \right| \le 2\max \left(\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} g(t)dt,\ \int_{\xi}^{2^{-k}} g(t)dt \right). \tag{10}$$

Действительно, если

$$\left|\int_{2^{-k-1}}^{\xi} g(t)dt\right| > 2\left|\int_{\xi}^{2^{-k}} g(t)dt\right|,$$

то

$$\left|\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} g(t)dt\right| = \left|\int_{2^{-k-1}}^{\xi} g(t)dt + \int_{\xi}^{2^{-k}} g(t)dt\right| \geq$$

$$\geq \left|\int_{2^{-k-1}}^{\xi} g(t)dt\right| - \left|\int_{\xi}^{2^{-k}} g(t)dt\right| \frac{1}{2}\left|\int_{2^{-k-1}}^{\xi} g(t)dt\right|,$$

т.е. верно (10). Если $\xi - 2^{-k-1} \geq 2^{-k-2}$, то из (9) следует, что

$$\left|\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} f(t)g(t)dt\right| = \left(\xi - 2^{-k-1}\right) f(2^{-k-1}) \frac{1}{(\xi - 2^{-k-1})}\left|\int_{2^{-k-1}}^{\xi} g(t)dt\right| \leq$$

$$\leq \left(2^{-k} - 2^{-k-1}\right) f(2^{-k-1}) \sup_{|e|\ 2^{-k-2}} \frac{1}{e}\left|\int_e g(t)dt\right| \leq 2^{-k-1} f(2^{-k-1})\overline{g(2^{-k-2}, M_0)}.$$

Если $\xi - 2^{-k-1} < 2^{-k-2}$, то $2^{-k} - \xi \geq 2^{-k-2}$, тогда из (10) следует, что

$$\left|\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} f(t)g(t)dt\right| \leq 2 f(2^{-k-1})\left|\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} g(t)dt\right| \leq$$

$$\leq 2\left(2^{-k-1}\right)\cdot f(2^{-k-1})\overline{g(2^{-k-1}, M)} \leq 2^{-k} f(2^{-k-1})\overline{g(2^{-k-2}, M)}.$$

Таким образом, подставляя в (8), получим

$$\|a\|_{\lambda_p(\mu)} \leq 2^2 \sup_{\|b\|_{\lambda_{p'}(\mu^{-1}n)}=1} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-2} f(2^{-k-1}) g(2^{-k-2}) =$$

$$= 4 \sup_{\|b\|_{\lambda_{p'}(\mu^{-1}n)}=1} \sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{-k-2}\left(\omega(2^{-k-2})\right)^{-1}\overline{g(2^{-k-2}, M)}\right)\cdot f(2^{-k-1})\omega(2^{-k-2}) =$$

$$= 4 \sup_{\|b\|_{\lambda_{p'}(\mu^{-1}n)}=1} \sum_{k=2}^{\infty}\left(2^{-k}\left(\omega(2^{-k})\right)^{-1}\overline{g(2^{-k}, M)}\right)\cdot f(2^{-k+1})\omega(2^{-k}) \leq$$

$$\leq 4 \sup_{\|b\|_{\lambda_{p'}(\mu^{-1}n)}=1}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\left(2^{-k}\left(\omega(2^{-k})\right)^{-1}\overline{g(2^{-k}, M)}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\cdot\left(\sum_{k=2}^{\infty}\left(f(2^{-k+1})\omega(2^{-k})\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C_1 \sup_{\|b\|_{\lambda_{p'}(\mu^{-1}n)}=1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^{-k}\left(\omega(2^{-k})\right)^{-1}\overline{g(2^{-k+1}, M)}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(f(2^{-k+1})\omega(2^{-k})\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= C_2 \sup_{\|b\|_{\lambda_{p'}(\mu^{-1}n)}=1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2^{-k(1-\delta)}\omega^{-1}(2^{-k})}{2^{-k(1-\delta)}} 2^{-k}\overline{g(2^{-k+1}, M)}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2^{k\delta}\omega(2^{-k})}{2^{k\delta}} f(2^{-k+1})\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}}\frac{dt}{t}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как для любого $t>0$ $f(t)-$ невозрастающая функция и $\omega(t)$ принадлежит A, то существует $\delta, 0<\delta<1,$ что $\omega(t)t^{-\delta}-$ возрастающая функция, а $\omega(t)t^{-1+\delta}-$ убывающая функция, следовательно, получим следующие оценки:

$$\|a\|_{\lambda_p(\mu)} = C_3 \sup_{\|b\|_{\lambda_{p'}(\mu^{-1}n)}=1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^{k(1-\delta)}\int_{2^{-k}}^{-k+1} t^{1-\delta}\omega^{-1}(t)\overline{g(t)}dt\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^{-k\delta}\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} f(t)\omega(t)t^{-\delta}\frac{dt}{t}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le C_3 \sup_{\|b\|_{\lambda_{p'}(\mu^{-1}n)}=1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{2^{-k}}^{-k+1} t\omega^{-1}(t)\overline{g(t)}\frac{dt}{t}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} f(t)\omega(t)\frac{dt}{t}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \approx$$

По доказанной лемме 1 получим

$$\approx \sup_{\|b\|_{\lambda_{p'}(\mu^{-1}n)}=1}\left(\int_0^1\left(t\omega^{-1}(t)\overline{g(t)}\right)^{p'}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p'}}\cdot\left(\int_0^1\left(f(t)\omega(t)\right)^{p}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Далее, применяя неравенство (5) теоремы 1, мы получим следующее:

$$\|a\|_{\lambda_p(\mu)} \le C_4 \sup_{\|b\|_{\lambda_{p'}(\mu^{-1}n)}=1}\left(\int_0^1\left(f(t)\omega(t)\right)^{p}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n^{*}n\mu^{-1}(n)\right)^{p'}\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= C_4 \sup_{\|b\|_{\lambda_{p'}(\mu^{-1}n)}=1}\left(\int_0^1\left(f(t)\omega(t)\right)^{p}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\|b\|_{\lambda_{p'}(\mu^{-1}n)} = C_4\left(\int_0^1\left(f(t)\omega(t)\right)^{p}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема доказана.

References

1. *Hardy G.H., Littlewood J.E. and Pólya G.* Inequalities 2d ed. Cambridge: at the University Press, 1952.
2. *Zygmund A.* Trigonometric series. — Vol. I, II. — London — New York: Cambridge University Press, 1968.
3. *Gulisashvili A.B.* Trigonometric series with monotone decreasing coefficients, and distribution functions // Mat. Zametki. — 1971. — Vol. 10. — № 1. — P. 3. — 10 [In Russian].
4. *Rodin V.A.* A Hardy-Littlewood theorem for the cosine series in a symmetric space // Mat. Zametki. — 1976. — Vol. 20. — № 2. — P. 241 — 246 [In Russian].
5. *Rodin V.A.* Membership of the sum of a cosine series with monotone coefficients in a symmetric space // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. — 1979. — № 8. — P. 60–64 [In Russian].
6. *Semenov E.M.* Interpolation of linear operators and estimates of Fourier coefficients // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1967. — Vol. 176. — № 6. — P. 1251–1254.
7. *Sagher Y.* An application of interpolation theory to Fourier series // Studia Math. — 1972. — Vol. 41. — № 2. — P. 169–181.
8. *Persson L.-E.* Relation between summability of functions and Fourier series // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1976. — Vol. 27. — № 3, 4.
9. *Persson L.-E.* An exact description of Lorentz spaces // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1983. — Vol. 46. — № 1–4.
10. *Persson L.-E.* Interpolation with a parameter function // Math. Scand. — 1986. — Vol. 59 — № 2.
11. *Persson L.-E.* Relation between regularity of periodic functions and their Fourier series. — PhD thesis, Dept. of Math., Umeå University. — 1974.
12. *Dyachenko M.* The Hardy-Littlewood theorem for trigonometric series with generalized monotone coefficients // Iz. VUZ. — 2008. — Vol. 52. — №. 5. — P. 32–40.
13. *D'yachenko M.* and *Nursultanov E.D.* Hardy-Littlewood theorem for trigonometric series with α -monotone coefficients // Mat. Sb. — 2009. — Vol. 20. — № 11. — P. 45–60 [In Russian].
14. *Dyachenko M.* and *Tikhonov S.* Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria // Studia Math. — 2009. — Vol. 193. — № 3. — P. 285–306.
15. *Simonov B.* and *Tikhonov S.* Norm inequalities in multidimensional Lorentz spaces // Math. Scand. — 2008. — Vol. 103. — № 2. — P. 278–294.
16. *Tikhonov S.* Trigonometric series with general monotone coefficients // Jour. Math. Anal. Appl. — 2007. — Vol. 326. — № 1. — P. 721–735.
17. *Boas R.P.* Integrability theorems for trigonometric transforms. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgeiete 38, Springer-Verlag, New York Inc. — 1967.
18. *Bergh J.* and *Löfström J.* Interpolation spaces. An Introduction. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer Verlag, Berlin-New York. — № 223. — 1976.
19. *Lorentz G.G.* Some new functional spaces // Ann. of Math. — 1950. — Vol. 51. — P. 37–55.
20. *Nursultanov E.D.* On the coefficients of multiple Fourier series from L_p -spaces // Izv. Math. — 2000. — Vol. 64. — № 1.

21. *Nursultanov E.D.* Network spaces and inequalities of Hardy-Littlewood type // Mat. Sb. — 1998. — Vol. 189. — № 3. — P. 83–102 [In Russian].
22. *Carro M. J., Raposo J. A.* and *Soria J.* Recent Developments in the Theory of Lorentz Spaces and Weighted Inequalities // Mem. Amer. Math. Soc. — Vol. 187. — 2007.

УДК 517.956.3

О граничной задаче для спектрально-нагруженного параболического оператора

On the boundary value problem for the spectrally loaded parabolic operator

Солдатов А.П.[1], Рамазанов М.И.[2], Шалдыкова Б.А.[3]

[1]*Белгородский государственный университет, Россия;*
[2]*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;*
[3]*Рудненский индустриальный институт (E-mail: bahyt21@mail.ru)*

Мақалада шектелмеген аймақтарда жүктеме қосылғышының туындысының реті теңдеудің дифференциалдық бөлігінің ретіне тең және жүктеме нүктесі кеңістік айнымалысы бойынша айнымалы жылдамдықпен қозғалатын параболалық типті спектралды-жүктелген теңдеулер үшін шекаралық есептер зерттеледі. Бұл жағдайда жүктелген дифференциалдық оператордың әлсіз ауытқуы бар операторларға тән емес жаңа қасиеттері пайда болады. Алдында қарастырылған [1–5] есептерден айырмашылығы, жүктеме нүкте $x = \alpha(t)$ бұл жерде $\alpha(t) = \left[t(1+\alpha(t))\right]^{\omega}$, $\omega < 1/2$ заңы бойынша қозғалады.

The object of this research is to investigate the boundary value problems for the spectrally-loaded parabolic equations in unbounded domain, when the order of initial in a loaded term is equal to the order of a differential part of equation and loaded point in space variable moves with variable speed. In this case new properties of the loaded differential operator are manifested, which are not inherited by operators with little disturbance. They require a special theoretical research. In contradistinction to earlier discussed problems [1–5] th loaded point is moving according to law $x = \alpha(t)$, where $\alpha(t) = \left[t(1+\alpha(t))\right]^{\omega}$, $\omega < 1/2$

1. Постановки задач. Рассмотрим в области Q = $\{x \in R_+, t \in R_+\}$ граничные задачи для спектрально-нагруженного уравнения теплопроводности

$$L_\lambda u = f \Leftrightarrow \begin{cases} u_t - u_{xx} + \lambda u_{xx}(x,t)\Big|_{x=\alpha(t)} = f; \\ u(x,0) = 0, u(0,t) = 0; \end{cases} \tag{1}$$

$$L_\lambda^* v = g \Leftrightarrow \begin{cases} -v_t - v_{xx} + \bar{\lambda}\delta''(x-\alpha(t)) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)d\xi = g; \\ v(x,\infty) = 0, v(0,t) = v(\infty,t) = v_x(\infty,t) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

и обобщенные спектральные задачи

$$L_1 u = -\lambda u_{xx}(x,t)_{|x=\alpha(t)} \Leftrightarrow \begin{cases} u_t - u_{xx} = -\lambda u_{xx}(x,t)_{|x=\alpha(t)}; \\ u(x,0) = 0, u(0,t) = 0; \end{cases} \tag{3}$$

$$L_1^* v = -\bar{\lambda} \cdot \delta''(x-\alpha(t)) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)d\xi \Leftrightarrow \begin{cases} -v_t - v_{xx} = -\bar{\lambda} \cdot \delta''(x-\alpha(t)) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)d\xi; \\ v(x,\infty) = 0, v(0,t) = v(\infty,t) = v_x(\infty,t) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Заданные функции выбираются из классов

$$\left(\alpha(t)\right)^{\frac{\omega-3/2}{\omega}} f \in L_1(Q),\ \left(\alpha(t)\right)^{-1}(x+\sqrt{t})\ g \in L_\infty(Q));$$