

- 4 Petrov I.B., Kholodov A.S. *Numerical study of some dynamic problems of solid mechanics grid — a characteristic method* // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1984, vol. 24, No. 5, p. 722–739.
- 5 Clifton R.J. *A difference method for plane problems in dynamic elasticity* // Quart. Appl. Math., 1967, vol. 25, No. 1, p. 97–116.
- 6 Ashirbayev N.K. *Numerical investigation of the gap in the boundary conditions for the wave field in a rectangle* // Bull. KarSU, ser. Mathematics, 2012, No. 3 (67), p. 7–11.

УДК 624.04

А.К.Бейсебаев, Д.Н.Калиев

*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: didar10\_90@mail.ru)*

### Оптимизация жесткостных характеристик элементов рамной конструкции

В статье изложен вариантный алгоритм оптимизации рамной конструкции. Вариантное проектирование сооружений, применяемое инженерной практикой, автоматизировано. Проектными параметрами приняты соотношения жесткостных характеристик отдельных элементов рамы, варьирование которых приводит к изменению внутренних усилий, а значит — и расходу материала. Критерием оптимальности взят объем материала, необходимый для изготовления конструкции. Задача многомерной оптимизации решена методом покоординатного спуска. Для автоматизации процесса решения на алгоритмическом языке разработана программа вычислений.

*Ключевые слова:* проектные параметры, критерий оптимальности, метод перемещений, метод покоординатного спуска, матричный алгоритм.

Основной задачей строительной механики является разработка методов расчета и получения данных для надежного и экономического проектирования зданий и сооружений. Под надежностью сооружений здесь понимается безопасность несущих конструкций, то есть практическое исключение возможности их разрушения. Для обеспечения необходимой надежности сооружения основные элементы конструкций должны иметь достаточно большие сечения. Экономика же требует, чтобы расход материалов, идущих на изготовление конструкций, был минимальным. Чтобы увязать требования надежности с экономичностью, необходимо возможно точнее произвести расчет и строго соблюдать в процессе проектирования, возведения и эксплуатации сооружения те требования, которые вытекают из этого расчета.

Вопросы оптимального проектирования сооружений получили в последнее время значительное развитие в связи с решением стоящих перед механикой важных задач снижения материалоемкости конструкций и улучшения их механических характеристик. Расширились и сами представления о наилучших в том или ином смысле конструкциях и условиях их функционирования. В настоящее время разработаны методы численной оптимизации, позволяющие эффективно оценивать чувствительность основных характеристик конструкций к изменениям параметров проектирования и анализировать способы формирования оптимальных решений. Достигнутые результаты позволили, в частности, широко использовать методы оптимизации при разработке систем автоматизированного проектирования. Однако еще многие проблемы оптимального проектирования не получили достаточное развитие, и по ним в настоящее время ведутся интенсивные исследования в строительной механике.

Классические методы расчета статически определимых и статически неопределимых систем еще не утратили своего значения, так как именно они лежат в основе современных численных методов и, кроме того, дают более наглядное описание физического содержания рассматриваемой задачи, формирующего и изучающего их четкое инженерное мышление. Поэтому в работе, наряду с классическими методами расчета стержневых систем, используется и современная матричная форма [1].

В предлагаемой работе рассматривается алгоритм расчета рамной конструкции, изображенной на рисунке 1 а. В качестве проектных параметров приняты отношения жесткостей стержней  $k_i EI$  конструкции на каждом характерном участке. Критерием оптимальности является общий объем расходуемого материала конструкции. Жесткости четвертого и пятого участков системы по технологи-

ческим соображениям приняты равными. Для оптимизации статически неопределимой рамы добавим в условие задачи четыре жесткостных переменных  $k_i = 1 (i = 1, 2, 3, 4)$  для отдельного участка, что позволит нам варьировать ими для определения оптимального расхода материала данной рамы.

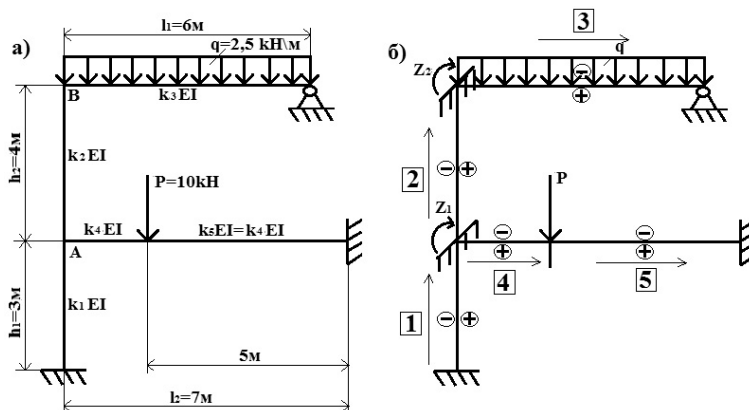


Рисунок 1. Заданная и основная системы

Расчет произведен методом перемещений, с произвольными жесткостными параметрами характерных участков рамы. Число неизвестных метода перемещений  $n = n_y + n_d = 2$ , называемое степенью кинематической неопределимости системы, определяют как сумму неизвестных углов поворота  $n_y$  и неизвестных линейных перемещений узлов  $n_d$ .

После определения числа неизвестных примем основную систему метода перемещений путем наложения на узлы заданной системы связей, препятствующих их перемещениям (рис. 1 б), где в прямоугольниках дана нумерация характерных участков, в кружках — знаки моментов, стрелки указывают направление и порядок расчета.

Для вычисления реакций воспользуемся свойствами взаимности реакций и перемещений. Строим эпюры изгибающих моментов в кинематической определимой основной системе метода перемещений от единичных смещений  $\bar{M}$  и от заданной нагрузки  $M_p$ , а также в основной системе метода сил строим эпюру моментов  $\tilde{M}_p$  (рис. 2) от внешней нагрузки.

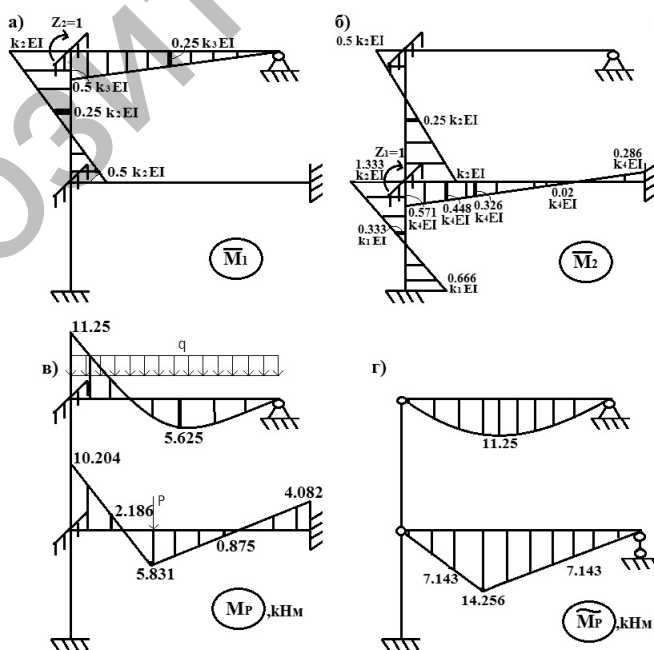


Рисунок 2. Единичные и грузовые эпюры метода перемещений

Как известно, матричный алгоритм расчета рам, позволяющий автоматизировать процесс вычислений, имеет вид [2]:

$$M = M_p + \bar{M}(\bar{M}^T L \bar{M})^{-1} \bar{M}^T L \tilde{M}_p,$$

где исходные матрицы данных единичной эпюры  $\bar{M}$  и грузовых эпюр  $M_p, \tilde{M}_p$ , а также матрица податливости  $L$ , которые для исследуемой задачи, имеют вид:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0.666k_1 \\ 0 & -0.333k_1 \\ 0 & -1.333k_1 \\ 0.5k_2 & k_2 \\ -0.25k_2 & 0.25k_2 \\ -k_2 & -0.5k_2 \\ 0.5k_3 & 0 \\ 0.25k_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.5714k_4 \\ 0 & 0.4484k_4 \\ 0 & 0.3265k_4 \\ 0 & 0.3265k_4 \\ 0 & 0.0204k_4 \\ 0 & -0.2857k_4 \end{pmatrix}, \quad M_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -11.25 \\ 5.625 \\ 0 \\ -10.204 \\ -2.186 \\ 5.831 \\ 5.831 \\ 0.875 \\ -4.082 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 11.25 \\ 0 \\ 0 \\ 7.143 \\ 14.256 \\ 14.256 \\ 7.183 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{3}{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{k_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{k_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{k_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{k_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{24}{k_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{k_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{k_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{k_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{k_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{k_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{20}{k_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{k_4} & 0 \end{pmatrix}$$

Для решения задачи многомерной оптимизации воспользуемся методом покоординатного спуска. Каждая переменная  $k_i$ , характеризующая соотношение жесткостных параметров, варьировалась в интервале неопределенности от  $[0.2;5.0]$  с шагом 0.2. При изменении соотношения жесткостных характеристик менялась и эпюра внутренних усилий, а значит, и требуемые из условия прочности размеры сечения участков. Для оптимизации предлагаемого алгоритма разработана программа, реализованная на алгоритмическом языке программирования Pascal.

В рассматриваемой задаче сечение с наибольшим по абсолютной величине изгибающим моментом называется опасным поперечным сечением. Максимальный момент каждого участка необходим для решения задачи прочности.

Согласно условию прочности, необходимо выполнение следующего условия [3]:

$$[\sigma] = \frac{|M \max_i|}{W_i} = \sigma.$$

При подборе сечения балки (проектного расчета) требуемый момент сопротивления  $W_i$  на  $i$ -том участке будет равен

$$W_i = \frac{|M \max_i|}{[\sigma]} \tag{1}$$

Подставим полученные данные из таблицы в формулу (1), где допустимое напряжение для материала возьмем  $[\sigma] = 40$  МПа. Проектируемая рамная конструкция находится из условия прочности работы материала, в упругой области прямоугольного сечения, которое принято с отношением сторон  $b = \frac{h}{2}$ .

Из формулы момента сопротивления изгибу прямоугольного сечения:

$$W_i = \frac{bh^2}{6}, \dots,$$

находим высоту сечения:

$$h_i = \sqrt[3]{12W_i}.$$

Тогда объем материала на каждом участке будет определяться:

$$V_i = \frac{(h_i^2 l_i)}{2},$$

где  $V_i$  — объем материала на участке  $i$ ;  $l_i$  — длина этого участка.

По данным матричного алгоритма, в характерных сечениях вычислены значения изгибающих моментов, согласно которым построена окончательная эпюра изгибающих моментов  $M$  от внешней нагрузки (рис. 3).

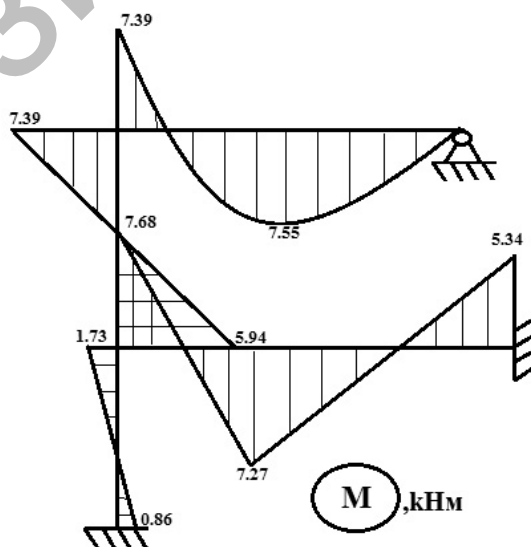


Рисунок 3. Окончательная эпюра

Далее определяем общий объем расходуемого материала, требуемого для данной рамной конструкции. По результатам объемов участков, общий минимальный объем материала, расходуемый для данной рамы, получен при значениях  $k_i$ , сведенных в приведенной ниже таблице.

Т а б л и ц а

Оптимальное значение  $k_i$ 

Номер участка	1	2	3	4 и 5
Значение $k_i$	1.0	2.3	3.0	3.4
$ M_{\max_i} , \text{кНм}$	1,73	7,398	7,398	7,682

**Вывод.** Приведен алгоритм решения задачи оптимизации рамной конструкции путем рационального определения соотношений жесткостных параметров характерных элементов конструкции. Проблема свелась к задаче многомерной оптимизации, реализованной методом покоординатного спуска. Полученные результаты соответствуют теоретическим предпосылкам, а алгоритм может быть рекомендован при реализации подобных задач.

## Список литературы

- 1 *Клейн Г.К.* Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем). — М.: Высш. шк., 1997. — С. 133.
- 2 *Бутенко Ю.И.* Строительная механика стержневых систем и оболочек. — Киев: Высш. шк., 1989. — С. 184.
- 3 *Дарков А.В., Шпиров Г.С.* Сопротивление материалов. — М.: Высш. шк., 1975. — С. 184.

А.К.Бейсебаев, Д.Н.Қалиев

### Рама конструкциясы элементінің қаттылық сипаттамаларын оңтайландыру

Мақалада рама конструкциясының оңтайландыру нұсқаларының алгоритмі баяндалған. Инженерлік тәжірибеде нұсқалар автоматтандырылған. Рамалық кейбір элементтердің жобалық параметрі ретінде қаттылық сипаттамасы алынған. Оларды өзгерту арқылы оның ішкі күштерін және материалдың шығынын өзгерту болады. Тиімділік критерийі ретінде жобалауға қажетті материалдың көлемі алынған. Көп өлшемді оңтайландыру есебі координат бойынша түсіру әдісімен шешілген. Есептік шешуін автоматтандыратын алгоритм тілінде бағдарлама құрылған.

А.К.Beisebayev, D.N.Kaliyev

### The stiffness characteristics of the elements the frame structure optimization

The article describes a variant optimization algorithm is a frame structure. Variant design the structures, applied engineering practice, automated. Design parameters adopted by the ratio of the stiffness characteristics of the individual elements of the frame whose variation leads to a change of internal forces, and hence the flow of material. The optimality criterion is taken the amount of material required for the manufacture of construction. The problem is solved by a multi-dimensional optimization of descent. To automate the process of solving the algorithmic language a program being computed.

## References

- 1 Klein G.K. *Guide to practical training at the rate of structural mechanics (statics rod systems)*, Moscow: High School, 1997, p. 133.
- 2 Butenko Y.I. *Structural Mechanics rod systems and shells*, Kiev: High School, 1989, p. 184.
- 3 Darkov A.V., Shpirov G.S. *Resistance materials*, Moscow: Higher School, 1975, p. 184.