УДК 517.51

М.С.Саутбекова, Н.А.Бокаев, А.Е.Игенберлина

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (E-mail: vinchesterchik@mail.ru)

Пространства Лизоркина-Трибеля и сильная суммируемость кратных рядов Фурье-Уолша

В статье рассмотрены пространства типа Лизоркина-Трибеля на двоичных группах и средние, полученные с помощью полиномов по системе Уолша. Исследована сильная суммируемость кратных рядов Фурье-Уолша в этих пространствах, даны некоторые оценки. В терминах, указанных на средних пространствах, даны необходимые и достаточные условия принадлежности функции пространствам типа Лизоркина-Трибеля на двоичной группе. В виде основного результата приведены теоремы 1, 2 и некоторые леммы для их доказательства.

Ключевые слова: система Уолша, сильная суммируемость, пространства Лизоркина-Трибеля, двоичные группы, средние.

Пусть задана система функций Уолша $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ в нумерации Пэли. Для числа $x \in R^+$ и натурального n положим

$$x_n \equiv \left[2^n x\right](\operatorname{mod} 2),\ \ x_{-n} \equiv \left[2^{1-n} x\right](\operatorname{mod} 2),$$

где $[a]$ означает целую часть числа *a*; x_n, x_{-n}, по определению, равны 0 или 1. Так как $x_{-n} = 0$ для $n \ge n(x)$, то для $(x, y) \in R^+ \times R^+$ определено целое неотрицательное число

$$t(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_{-n} + x_{-n} y_n).$$

Функция Файна определяется на $R^+ \times R^+$ равенством [1–3]:

$$\chi(x,y) = (-1)^{t(x,y)},$$

следовательно, $\chi(x,y) = \pm 1$ для $(x,y) \in R^+ \times R^+$.

Функция Файна удовлетворяет следующим свойствам:

$$1)\chi(x,y) = \chi(y,x),\quad 2)\chi(x,k) = w_k(x),\ \ k = 0,1,2,\ldots$$

Для $x \in R^+$ справедливо разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{-n} 2^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}. \qquad (1)$$

Введем на R^+ операцию $\oplus$ покоординатного сложения по модулю 2 следующим образом. Пусть для $y \in R^+$ определено разложение, аналогичное (1). Тогда положим $x \oplus y = z$, где

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} 2^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{2^n},$$

причем $z_{-n} = x_{-n} + y_{-n} (\operatorname{mod} 2)$, $z_n = x_n + y_n (\operatorname{mod} 2)$.

Для функции $f(x) \in L_p(0,\infty)$ функция Файна порождает преобразование Фурье-Уолша:

$$(Ef) \equiv f^{\wedge}(x) = \int_0^{\infty} f(y)\chi(x,y)\,dy.$$

При $p = 1$ это равенство следует понимать поточечно. При $1 < p \le 2$ функция $f^{\wedge}(x)$ понимается как предел по L_q-норме при $a \to \infty$ функции

$$F(x,a) = \int_0^{a} f(y)\chi(x,y)\,dy,$$

где $q + p = pq$.

В силу определения функции Файна, обратное преобразование Фурье-Уолша для функций из $L_p(0,\infty)$, $1 \le p \le 2$ совпадает с прямым. Если $f(x) \in L_1(0,\infty)$, то коэффициенты Фурье-Уолша задаются следующим образом:

$$f^{\wedge}(k) = \int_0^{\infty} f(x) w_k(x) dx. \; F(x,a) = \int_0^{a} f(y) \chi(x,y) dy,$$

где $q + p = pq$.

Обозначим через S — пространство ступенчатых функций на R^+ с двоичными интервалами постоянства, в частности, $w_k(x) \in S$, а через $S^{'}$ — пространство, сопряженное с S, т.е. множество обобщенных функций, представимых в виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (f, w_k) w_k = \sum_{k=0}^{\infty} f^{\wedge}(k) w_k(x).$$

Рассмотрим множество $\Phi(R^+)$ систем $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$, таких что

$$\varphi_j(x) = \varphi(2^{-j}x), \; j = 1,2,..., \quad \text{supp } \varphi_0 \subset \{x : 0 \le x \le 2\};$$

$$\text{supp } \varphi \subset \left\{x : \frac{1}{2} \le x \le 2\right\}, \; \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) = 1 \text{ для любого } x \in R^+.$$

Пусть $1 \le p,q \le 2$, $f \in S`$, $f_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_j(k) f^{\wedge}(k) w_k(x)$.

Тогда пространство Лизоркина-Трибеля на двоичной группе определено следующим образом:

$$F_{p,q}^{s} = \left\{ f : f \in S`, \; \|f\|_{F_{p,q}^{s}} = \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \left| f_j(x) \right|^{q} \right)^{1/q} \right\|_{L_p} < \infty \right\}.$$

Далее пусть ψ — действительнозначная, ограниченная функция, определенная на R^+, $\psi(0) = 1$ и имеющая компактный носитель. Введем средние $M_{\nu}^{\psi} f(x)$, $\nu = 1,2,...$, для $f \in S`$

$$M_{\nu}^{\psi} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi\left(\frac{k}{\nu}\right) f^{\wedge}(k) w_k(x), \quad M_{\nu}^{\psi} f(x) \text{ — полином Уолша.}$$

Возникает вопрос, при каких условиях на $f(x) \in L_p(0,\infty)$ будет выполняться условие:

$$\left\| \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{sq-1} \left| f(x) - M_{\nu}^{\psi} f(x) \right|^{q} \right)^{1/q} \right\|_{L_p} < \infty. \qquad (2)$$

И, обратно, какими свойствами будет обладать функция, если выполняется условие (2).

На эти вопросы отвечают следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $\psi(x)$ — непрерывная функция на R^+, имеющая компактный носитель, $\psi(0) = 1$, $1 \le p,q \le 2$, а $\lambda, \sigma \in R^+$ такие, что $\lambda > 1$ и для любого $y \in R^+$

$$\sup_{1 < \tau \le 2} \left| F\left[x^{-\sigma} \left(\psi(x) - \psi(\tau x) \right) \right](y) \right| \le C(1+y)^{-\lambda}.$$

Тогда при $0 < s \le \sigma$ для всех $f \in F_{p,q}^{s} \cap L_p$ существует постоянная $C^{'}$, такая что:

$$\left\| \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{sq-1} \left| f(x) - M_{\nu}^{\psi} f(x) \right|^{q} \right)^{1/q} \right\|_{L_p} \le C^{`} \|f\|_{F_{p,q}^{s}}. \qquad (3)$$

Теорема 2. Пусть $\psi(x)$ — ограниченная функция из $S(R^+)$ с компактным носителем и пусть существует натуральное число d, удовлетворяющее условию:

$$\eta(x) = \psi(x/d) - \psi(x) > 0 \text{ для } 2 < x < 16.$$

Пусть $s>0, 1\le p, q\le 2$ и выполняется условие (2). Тогда для $f\in L_1\cap L_p$ существует положительная постоянная C'', не зависящая от f, такая что:

$$\|f\|_{F^s_{p,q}}\le C``\left(\|f\|_{L_p}+\left\|\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{sq-1}\left|f(x)-M^{\psi}_{\nu}f(x)\right|^q\right)^{1/q}\right\|_{L_p}\right).$$

В классическом случае подобные теоремы доказаны в [4, 5].

Для доказательства этих теорем необходимы следующие вспомогательные утверждения:

Неравенство Никольского [6]. Пусть $0<p\le q\le\infty$. Если $\varphi\in S'(j)$, то $\|\varphi\|_q\le 2^{j\left(1/p-1/q\right)}\|\varphi\|_p$.

Доказательство проводится так же, как и для тригонометрических полиномов.

Максимальное неравенство Фефферманa-Стейна. Пусть $1<p, q<\infty, 1<r<\min(p,q)$. Тогда существует положительная постоянная C, такая что

$$\left\|\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(M|f_\nu|^r\right)^{q/r}\right)^{1/q}\right\|_{L_p}\le C\left\|\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|f_\nu|^q\right)^{1/q}\right\|_{L_p}$$

для всех $\left\{f_\nu(x)\right\}_{\nu=1}^{\infty}\in L_p(0,\infty)$.

Здесь

$$(Mf)(x)=\sup|Q|^{-1}\int_Q|f(y)|dy,\quad x\in R^+$$

есть максимальная функция Харди-Литлвуда, а супремум берется по всем отрезкам Q с центром в точке x (см. [6]).

Лемма 1. Пусть t — полином по системе Уолша и $F\eta\in L_1(0,\infty)$, тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\eta(k)t^{\wedge}(k)w_k(x)=\int_0^{\infty}(F\eta)(y)t(x\oplus y)dy$$

для $x\in R^+$.

Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\eta(k)t^{\wedge}(k)w_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}t^{\wedge}(k)w_k(x)\int_0^{\infty}(F\eta)(y)w_k(y)dy=$$

$$=\int_0^{\infty}(F\eta)(y)\sum_0^{\infty}t^{\wedge}(k)w_k(x\oplus y)dy=\int_0^{\infty}(F\eta)(y)t(x\oplus y)dy.$$

Лемма 2. Пусть $0<r\le 1$, $\mathrm{t_N}(x)=\sum_0^{c_1N}a_kw_k(x)$ — полином Уолша, N — положительное натуральное число, $a_k\in R$, $\rho_{\mathrm{N}}(x)$ — действительнозначная функция,

$$\operatorname{supp}\rho_{\mathrm{N}}\subset\left\{x:0\le x\le c_2N\right\},\quad F\rho_N\in L_1(0,\infty).$$

Тогда существует постоянная C, не зависящая от ρ_N, t_N, N, такая что:

$$\left|\sum_0^{\infty}\rho_N(k)t^{\wedge}(k)w_k(x)\right|^r\le CN^{(1-r)}\int_0^{\infty}\left|(F\eta)(y)\right|^r\left|t(x\oplus y)\right|^r dy$$

для любого $x\in R^+$.

Доказательство. Для фиксированного $x\in R^+$ рассмотрим функцию

$$g(y)\equiv(F\rho_N)(y)t_N(x\oplus y)=cF\left[\rho_N*F\left(t_N(x\oplus\cdot)\right)\right](y),\ \ y\in R^+.$$

Тогда $Fg\subset\left\{x:0<x<c_3N\right\}$. Поэтому утверждение леммы 2 следует из Леммы 1.

Лемма 3. Пусть

$$0 < r \le 1, \quad \frac{1}{r} < \lambda < \infty, \quad \left| F\eta\left(x\right)\right| \le C_1 \left(1 + x\right)^{-\lambda}, \; x \in R^+;$$

$$\eta \subset \left\{ y : 0 < y < 2^K \right\}, \; K = 0,1,2,...$$

Если

$$f_{\mathrm{j}}\left(x\right) = \sum_{k=0}^{c_2 2^j} a_k w_k\left(x\right), \quad j = 0,1,2,...,$$

тогда существует постоянная C, не зависящая от j, k такая, что для каждого $x \in R^+$

$$\left| \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \eta\left(2^{-j} k\right) t_j^{\wedge}\left(k\right) w_k\left(x\right) \right|^r \le C 2^{K(1-r)} \left(M \left| f_j \right|^r \right)\left(x\right).$$

Доказательство, с использованием леммы 2, аналогично тригонометрическому случаю (см. [5]).

Доказательство теоремы 1. Пусть $f \in F_{p,q}^s\left(R^+ \cap\right) L_p\left(R^+\right), \quad 0 < s < \infty, \quad 1 \le p, q \le 2.$ Тогда имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{sq-1} \left| \left(f - M_\nu^\psi f \right)\left(x\right) \right|^q = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=2^j}^{2^{j+1}-1} \nu^{sq-1} \left| \left(f - M_{2^{j+1}}^\psi f + M_{2^{j+1}}^\psi f - M_\nu^\psi f \right)\left(x\right) \right|^q \right) \le \tag{4}$$

$$\le c \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \left| \left(f - M_{2^{j+1}}^\psi f \right)\left(x\right) \right|^q + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \sup_{\nu=2^j,...,2^{j+1}-1} \left| \left(M_{2^{j+1}}^\psi f - M_\nu^\psi f \right)\left(x\right) \right|^q \right).$$

Используем тот факт, что

$$\left(f - M_{2^{j+1}}^\psi f \right)\left(x\right) = \sum_{l=j+1}^{\infty} \left(M_{2^{l+1}}^\psi f - M_{2^l}^\psi f \right)\left(x\right),$$

тогда при $0 < r < 1$ и $s > 0$ получим:

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \left| \left(f - M_{2^{j+1}}^\psi f \right)\left(x\right) \right|^q \le \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} 2^{jsq} \left| \left(M_{2^{j+l+1}}^\psi f - M_{2^{j+l}}^\psi f \right)\left(x\right) \right|^r \right)^{q/r} \le \tag{5}$$

$$\le \left(\sum_{l=1}^{\infty} 2^{-lsr} \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{(j+1)sq} \left| \left(M_{2^{j+l+1}}^\psi f - M_{2^{j+1}}^\psi f \right)\left(x\right) \right|^q \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{q}{r}} \le$$

$$\le c \sum_{l=1}^{\infty} 2^{jsq} \left| \left(M_{2^{j+1}}^\psi f - M_{2^j}^\psi f \right)\left(x\right) \right|^q.$$

Из (4) и (5) следует

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{sq-1} \left| \left(f - M_\nu^\psi f \right)\left(x\right) \right|^q \le c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \sup_{\nu=2^j,...,2^{j+1}-1} \left| \left(M_{2^{j+1}}^\psi f - M_\nu^\psi f \right)\left(x\right) \right|^q. \tag{6}$$

Пусть далее

$$\varphi \in S, \quad \operatorname{supp} \varphi \subset \left\{ x : \frac{1}{2} \le x \le 2 \right\} \text{ и для } \left| x \right| \ge 1 \quad \sum_{j=0}^{\infty} \varphi\left(2^{-j} x\right) = 1.$$

Положим $\eta_\tau\left(x\right) = \psi(x) - \psi(\tau x), \quad 1 < \tau \le 2.$

Если $j = 0,1,2,..., \quad \nu = 2^j,...,2^{j+1}-1,$ тогда

$$\left| (M_{2^{j+1}}^\psi f - M_\nu^\psi f)(x) \right| \le \sup_{1<\tau\le 2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \eta_\tau\left(2^{-j-1} k\right) f^{\wedge}(k) w_k(x) \right|. \tag{7}$$

Функция φ имеет компактный носитель. Следовательно, существует натуральное число L такое, что:

$$\eta_\tau\left(2^{-j-1} k\right) = \sum_{l=0}^{j+L} \eta_\tau\left(2^{-j-1} k\right) \varphi\left(2^{-l} k\right) = \sum_{-\infty}^{L} \eta_\tau\left(2^{-j-1} k\right) \varphi_{l+j}(k),$$

где $\varphi_l = 0$ при $l = -1, -2, ...$ и $\varphi_l(\bullet) = \varphi\left(2^{-l} \bullet\right)$ при $l = 0,1,2,...$

Пусть $\sigma>0$. Введем следующую функцию:

$$f_l(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left|2^{-l-1}k\right|^{\sigma}\varphi_l(k)f^{\wedge}(k)w_k(x),\quad l=0,\pm1,\pm2,\dots$$

Тогда

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\eta_\tau\left(2^{-j-1}k\right)f^{\wedge}\left(k\right)w_k\left(x\right)\right|\le$$

$$\le\sum_{j=0}^{\infty}2^{j\sigma}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left|2^{-j-1}k\right|^{-\sigma}\eta_\tau\left(2^{-j-1}k\right)f^{\wedge}_{j+1}\left(k\right)w_k\left(x\right)\right|,\quad j=0,1,2,\dots$$

Пусть λ и σ есть числа, удовлетворяющие условию теоремы.

Можно выбрать положительное число r так, что $0<r<1,\;\; \lambda>\dfrac{1}{r}$. Тогда из последнего неравенства и леммы 3 с $\left|\xi\right|^{-\sigma}\eta_\tau(\xi)$ вместо $\eta(\xi)$ имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\eta_\tau\left(2^{-j-1}k\right)f^{\wedge}_{j+1}(k)w_k(x)\right|\le\sum_{l=-\infty}^{L}2^{l\sigma}\left(M\left|f_{j+l}\right|^{r}\right)^{\frac{1}{r}}(x).$$

Отсюда и из неравенств (6), (7) получим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{sq-1}\left|\left(f-M_\nu^{\psi}f\right)(x)\right|^{q}\le c\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsq}\left(\sum_{l=-\infty}^{L}2^{l\sigma}\left(M\left|f_{j+l}\right|^{r}\right)^{\frac{1}{r}}(x)\right)^{q}. \tag{8}$$

Пусть $s<\sigma,\;\; r<1$. Имеем оценку

$$\left\{\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsq}\left(\sum_{l=-\infty}^{L}2^{l\sigma}\left(M\left|f_{j+l}\right|^{r}\right)^{\frac{1}{r}}(x)\right)^{q}\right\}^{\frac{r}{q}}\le c\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(M\left|2^{js}f_j\right|^{r}\right)^{\frac{q}{r}}(x)\right)^{\frac{r}{q}}. \tag{9}$$

Из (8), (9) и максимального неравенства следует:

$$\left\|\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{sq-1}\left|\left(f-M_\nu^{\psi}f\right)(x)\right|^{q}\right)^{1/q}\right\|_{L_p}\le c\left\|\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsq}\left|f_j(x)\right|^{q}\right)^{1/q}\right\|_{L_p}. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь множество $\beta=\left\{\beta_j\right\}_{j=0}^{\infty}\in\Phi$. Положим

$$\beta_0^{'}=\beta_0+\beta_1,\quad \beta_j^{'}=\beta_{j-1}+\beta_j+\beta_{j+1},\quad j=1,2,\dots,$$

тогда

$$f_j(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left|2^{-l-1}k\right|^{\sigma}\varphi(2^{-j}k)f_j^{\wedge}(k)w_k(x),\quad l=0,1,2,\dots,$$

где $f_j^{'}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_j^{'}(k)f^{\wedge}(k)w_k(x)$.

Используя лемму 3 с $\eta(\xi)=\left|\xi/2\right|^{\sigma}\varphi(\xi)$ и с $f_j^{'}(x)$ вместо $f_j(x)$ и максимальное неравенство, получим

$$\left\|\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsq}\left|f_j(x)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L_p}\le c\left\|f\right\|_{F_{p,q}^{s}}.$$

Объединив последнее неравенство с (10), получим требуемое неравенство (3).

Доказательство теоремы 2. Без потери общности ограничимся рассмотрением функций $f\in L_p\cap L_1$ с $f^{\wedge}(0)=0$ ([5], Теорема 1). Пусть $\varphi\in\Phi$, тогда имеем

$$\left\|f\right\|_{F_{p,q}^{s}}\le \tag{11}$$

$$\le c\left\{\left\|\left(\sum_{j=2}^{\infty}2^{jsq}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\varphi\left(2^{-j}k\right)f^{\wedge}\left(k\right)w_k\left(x\right)\right|^q\right)^{1/q}\right\|_{L_p}+\sum_{j=0}^{1}\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\varphi\left(2^{-j}k\right)f^{\wedge}\left(k\right)w_k\left(x\right)\right\|_{L_p}\right\}.$$

Пусть $\tau\in R,\ \ 1\le\tau\le 2$. Тогда $\eta(\tau\xi)=\psi\left(\tau\xi/d\right)-\psi\left(\tau\xi\right)$ при $2\le\xi\le 8$.

Положим

$$\rho_\tau\left(\xi\right)=\psi\left(\xi/4\right)\Big/\eta(\tau\xi),\qquad 1\le\tau\le 2;$$
$$g_{\tau,j}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\eta\left(\tau 2^{-j}k\right)f^{\wedge}(k)w_k(x),\qquad j=0,1,2,... \tag{12}$$

Следовательно, можно записать

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi\left(2^{-j-2}k\right)f^{\wedge}(k)w_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\rho_\tau\left(2^{-j}k\right)g^{\wedge}_{\tau,j}(k)w_k(x),\qquad j=0,1,2,... \tag{13}$$

Пусть $0<r<1$. Применим лемму 3 с g_τ вместо η и $g_{\tau,j}$ вместо f_j

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\rho_\tau\left(2^{-j}k\right)g^{\wedge}_{\tau,j}(k)w_k(x)\right|^r\le c\left(M\left|g_{\tau,j}\right|^r\right)(x),\qquad x\in R^+,\quad j=0,1,2,...$$

Постоянная c не зависит от $x,\ \ \tau,\ \ j$. Далее положим:

$$\tau=2^j/\nu;\quad \nu=2^{j-1}+1,\ ...\ ,2^j;\ \ j=1,2,...\quad(\tau=1,\ \ j=0).$$

Из (12), (13) и последнего неравенства получим:

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\varphi\left(2^{-j-2}k\right)f^{\wedge}(k)w_k(x)\right|^q\le c2^{-j+1}\sum_{\nu=2^{j-1}+1}^{2^j}\left(M\left|g_\nu\right|^r\right)^{\frac{q}{r}}(x),\quad j=0,1,2,...,$$

где $g_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\eta\left(\nu^{-1}k\right)f^{\wedge}(k)w_k(x)$.

Следовательно, по максимальному неравенству Феффермана-Стейна [6]:

$$\left\|\left(\sum_{j=2}^{\infty}2^{jsq}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\varphi\left(2^{-j}k\right)f^{\wedge}(k)w_k(x)\right|^q\right)^{1/q}\right\|_{L_p}\le c\left\|\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(M\left|\nu^{s-\frac{1}{q}}g_\nu\right|^r\right)^{q/r}(x)\right]^{1/q}\right\|_{L_p}\le$$

$$\le c'\left\|\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{sq-1}\left|g_\nu(x)\right|^q\right]^{1/q}\right\|_{L_p}.$$

Тогда, так как

$$\left|g_\nu\left(x\right)\right|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left[\psi\left(\frac{k}{d\nu}\right)-\psi\left(\frac{k}{\nu}\right)\right]f^{\wedge}\left(k\right)w_k\left(x\right)\right|\le\left|f\left(x\right)-M^{\psi}_{d\nu}f\left(x\right)\right|+\left|f\left(x\right)-M^{\psi}_{\nu}f\left(x\right)\right|,$$

то

$$\left\|\left(\sum_{j=2}^{\infty}2^{jsq}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\varphi\left(2^{-j}k\right)f^{\wedge}(k)w_k(x)\right|^q\right)^{1/q}\right\|_{L_p}\le c\left\|\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{sq-1}\left|f(x)-M^{\psi}_{\nu}f(x)\right|^q\right]^{1/q}\right\|_{L_p}.$$

Аналогично, с применением леммы 3 и неравенства Феффермана-Стейна, оценивается вторая сумма в правой части неравенства (11)

$$\sum_{j=0}^{1}\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\varphi\left(2^{-j}k\right)f^{\wedge}(k)w_k(x)\right\|_{L_p}\le c'\left\|\left(f-M^{\psi}_{b}f\right)(x)\right\|_{L_p}+\left\|f\right\|_{L_p},$$

так как по условию теоремы существует натуральное число b, такое что $\psi\left(\frac{\xi}{b}\right) \in S$. Таким образом, завершено доказательство теоремы 2.

Список литературы

1 *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. — 2-е изд. — М.: ЛКИ, 2008. — 354 с.

2 *Голубов Б.И.* Элементы двоичного анализа. — М.: ЛКИ, 2007. — 207 с.

3 *Schipp F., Wade W.R., Simon P.* Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. — Budapest: Akadémiai Kiadó, 1990. — Vol. X. — 560 p. — Ft. 1120.

4 *Hans-Jürgen Schmeißer, Winfried Sickel*. On strong summability of multiple Fourier series and smoothness properties of functions // Analysis Mathematica. March, 1. — 1982. — P. 57–70.

5 *Hans-Jürgen Schmeißer, Winfried Sickel.* On Strong Summability of Multiple Fourier Series and Approximation of Periodic Function // Mathematische Nachrichten. — 1987. — Vol. 133. — Is. 1. — P. 211–236.

6 *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1980. — 664 с.

М.С.Сауытбекова, Н.Ә.Боқаев, А.Е.Игенберлина

Лизоркин-Трибель кеңістіктері және еселі Фурье-Уолш қатарларының күшті қосындылануы

Мақалада екілік топта анықталған Лизоркин-Трибель типтес кеңістіктер және Уолш жүйесі арқылы құрылған полиномдардың көмегімен орта мәндер берілген. Сонымен қатар Фурье-Уолш қатарларының осы кеңістіктеріндегі күшті қосындылануы зерттелді. Осы орта мәндер терминінінде функцияның екілік топтағы Лизоркин-Трибель кеңістігіне тиісті болуының қажетті және жеткілікті шарттары көрсетілді. Негізгі нәтиже ретінде 1, 2 теоремалар және оларды дәлелдеу үшін қосымша леммалар келтірілген.

M.S.Sautbekova, N.A.Bokayev, A.Ye.Igenberlina

Lizorkin-Triebel spaces and the strong summability of multiple Fourier-Walsh series

We consider the space of Lizorkin-Triebel on binary groups and averages obtained by using polynomials in Walsh system. We investigate the strong summability of multiple Walsh-Fourier series in these spaces, some estimates are given. In terms of averages; the necessary and sufficient conditions of membership of function to spaces of Lizorkin-Triebel on the binary group are given. As a main result there are represented Theorems 1 and 2 and some lemmas to prove them.

References

1 Golubov B.I., Yefimov A.V. *Walsh series and transforms: theory and applications*. — 2-e izd. — Moscow: LKI, 2008, 354 p.

2 Golubov B.I. *Elements of binary analysis*. — M.: LKI, 2007, p. 207.

3 Schipp F., Wade, W.R., Simon P. *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*. — Budapest: Akadémiai Kiadó, 1990, vol. X., 560 p., Ft. 1120.

4 Hans-Jürgen Schmeißer, Winfried Sickel. *On strong summability of multiple Fourier series and smoothness properties of functions* // Analysis Mathematica, 1982, March, 1, 8, p. 57–70.

5 Hans-Jürgen Schmeißer, Winfried Sickel. *On Strong Summability of Multiple Fourier Series and Approximation of Periodic Function* // Mathematische Nachrichten, 1987, vol. 133, Issue 1, p. 211–236.

6 Triebel H. *Interpolation theory, functional spaces, differential operators*. — Moscow: Nauka, 1980, 664 p.