References

1. *Bloschicyn V.YA., Lbov G.S.* About measure of information of logical phrases // Reports of the Republican School-Seminar // Technology of the development of the expert systems. — Kishinev, 1987. — P. 12–14.
2. *Lbov G.S., Starceva N.G.* Logical solving functions and questions to statistical stability of the decisions. — Novosibirsk: Publishers of the Institute mathematicians, 1999.
3. *Vikentiev A.A., Lbov G.S.* Setting the metric and in formativeness on statements of experts // Pattern Recognition and Image Analysis. — 1997. — Vol. 7 (2).
4. *Vikentiev A.A., Lbov G.S.* About measures of information of the boolean algebra of the offers and information of utterances experts. // Reports by WOUNDS. — 1998. — Vol. 361 (2).
5. *Berikov V.B.* The Cluster analysis with use the group tree decisions // Scientific herald NGTU. — 2009. — 3 (36).
6. *Lbov G.S., Berikov V.B.* Stability solving function in problem of the artificial perception and analysis to intermix information. — Novosibirsk: In mathematicians, 2005. — 218 p.
7. *Ruff YU.L., Palyutin E.A.* The Mathematics of logic. — M.: Nauka, 1991. — 336 p.

УДК 37.022:681.3 (075.8)

Методы решения задач на оптимизацию в курсе планиметрии при помощи вспомогательных задач

The methods solutions of the optimization tasks in planimetry course by supporting tasks

Григорьева Т.С., Заикина Т.В.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: bertiskanova_k_t@mail.ru)

Мақалада планиметрия курсындағы оңтайлы есептері және оларды қолданбалы есептер көмегімен шешу әдістемесі қарастырылады. Мұнда оқушылардың интуициясын дамытатын, дәлелді қорытындылауды қажет ететін есептер берілген. Сонымен қатар оқушылардың зерттеу мәдениетін тәрбиелеуге бағытталған мектеп планиметрия курсындағы экстремалды есептердің қойылымы көрсетілген. Мұндай есептердің барлық шешімдері математикалық модельдерді зерттеу және нақты жағдайларда тиімділеу құралдарын қолдануды зерттеу деңгейінде ұсынылады.

In this article there are tasks of optimization in planimetry course that are described by authors. It's also devoted to methods of making it by supporting tasks. In the article we can find some tasks that can let us develop intuition of pupils, learn them to draw sound conclusions. Moreover, authors tried to pay attention to making extremal tasks in school planimetry course that can make pupils exercise their culture of research. All the solutions of the tasks take part on the level of research of the mathematical model and on the level of research of the real systems by optimization tools.

Как показывают наблюдения, нерешенная сразу задача или проблема, на решение которой было затрачено немало творческих усилий, долго привлекает внимание учащегося. Время от времени он возвращается к ее решению, делает новые попытки на новой математической основе, испытывает новые приемы и методы и, в конце концов, при известной настойчивости, решает ее. Но даже если ученик и не решит задачу, то сами попытки решить ее, вызывающие столь усиленную концентрацию его умственных способностей, принесут несомненную пользу.

Из этих наблюдений нами сделан вывод, что для решения такой задачи необходимо создать такие условия, при которых учащиеся предварительно «вводятся» в решение задачи. Такое «введение» заключается в следующем. Сначала решаются вспомогательные задачи, постепенно вводящие учащихся в круг вопросов, близких к проблемным. При этом вырабатывается определенная методика решения этих задач. Для описания принципиальных процессов организации вспомогательных задач введем основные понятия.

Редукция (от лат. — *приводить обратно, возвращать*) — упрощение, сведение более сложного к более простому, доступному для анализа или решения. Эвристическая редукция — сведение исходной задачи к вспомогательной или их системе, решение которых более доступно и позволяет на их основе возвратиться к успешному и осознанному поиску решения исходной задачи. Редукция является одним из видов эвристических стратегий. Вспомогательная задача — это задача, решение которой более доступно и позволяет перейти к решению исходной задачи. Мы будем называть задачи эквивалентными, если решение любой из них делает очевидным решение другой. Переход от исходной задачи к эквивалентной называется двусторонней редукцией. Это сведение исходной задачи к вспомогательной представляет собой наиболее желательный способ формулировки вспомогательной задачи. Однако такой эквивалентный переход не всегда возможен, поэтому приходится часто пользоваться односторонней редукцией, которая является переходом от менее результативной задачи к более результативной. Но задача, даваемая в качестве проблемы, внешне не сходная или весьма близкая по смыслу с решенными, требует дополнительных знаний или разработки и применения новых методов решения. Приведем примеры таких комплексов задач [1–3].

Задача 1 (вспомогательная). На стороне BC треугольника ABC найти точку D так, чтобы отрезок AD имел: а) наибольшую длину, б) наименьшую длину.

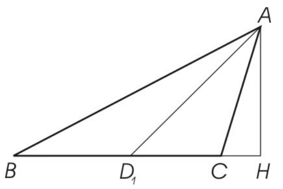

Рис. 1

Решение. а) Пусть D_1 — произвольная внутренняя точка стороны BC и $AB > AC$ (рис. 1).

Так как $\angle AD_1B > \angle C > \angle B$, то $AB > AD_1$. Следовательно, отрезок AD имеет наибольшую длину, если он совпадает со стороной AB. Если $AB = AC$, то имеем два решения.

б) Пусть в треугольнике ABC ни один из углов B и C нетупой. Тогда основание высоты, проведенной из вершины A, находится на стороне BC и отрезок AD имеет наименьшую длину, если $AD \perp BC$.

Пусть теперь угол C тупой. В этом случае основание H высоты AH треугольника лежит на продолжении стороны BC за точку C. Так как наклонная AC меньше всякой другой наклонной AD_1 с основанием на BC, то отрезок AD имеет наименьшую длину, если он совпадает со стороной AC треугольника.

Задача 2. Через вершину A треугольника ABC провести прямую l так, чтобы сумма расстояний до нее от вершин B и C была наименьшей.

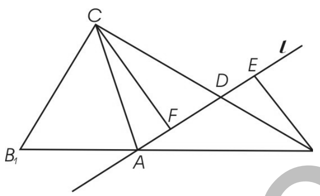

Рис. 2

Решение. Продолжим сторону AB треугольника ABC за вершину A на отрезок AB_1, равный AB (рис. 2).

Всякая прямая, проходящая через точку A, пересекает отрезок BC или отрезок B_1C. Рассмотрим оба случая.

Пусть прямая l пересекает отрезок BC в точке D. Проведем перпендикуляры BE и CF к прямой l. Площадь S треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ABD и ACD, следовательно,

$$S = \frac{1}{2} AD \cdot BE + \frac{1}{2} AD \cdot CF, \text{ откуда } BE + CF = \frac{2S}{AD}.$$

Так как S постоянна, то сумма $BE + CF$ имеет наименьшее значение при наибольшем значении AD. Согласно предыдущей задаче, если $AB > AC$, то искомая прямая l совпадает с AB, а наименьшая сумма расстояний до нее равна высоте треугольника, проведенной из вершины C. Если $AB = AC$, то имеем два решения: прямые AB и AC.

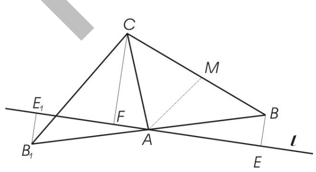

Рис. 3

Предположим, что прямая l пересекает отрезок B_1C (рис. 3). Проведем $B_1E_1 \perp l$. Из равенства треугольников ABE и AB_1E_1 следует, что $BE = B_1E_1$. Теперь рассмотрим сумму расстояний B_1E_1 и CF до прямой l. Рассуждая так же, как в предыдущем случае, мы получим то же решение: если $AB > AC$, то искомая прямая l совпадает с AB, если $AB = AC$, то обе прямые AB и AC удовлетворяют условию.

Задача 3. Через вершину A треугольника ABC провести прямую l так, чтобы сумма расстояний до нее от вершин B и C была наибольшей.

Решение. Воспользуемся формулой

$$BE + CF = \frac{2S}{AD},$$

полученной при решении предыдущей задачи. Требуется определить, при каком положении прямой l отрезок ее AD является кратчайшим.

Пусть в треугольнике ABC (рис. 2) угол A тупой и прямая l пересекает сторону BC. Тогда, согласно задаче 136, отрезок AD имеет наименьшую длину, если $AD \perp BC$ (точка D лежит на стороне BC, так как углы B и C острые), а наибольшая сумма расстояний от вершин B и C до прямой l равна отрезку BC.

Если прямая l пересекает отрезок B_1C (рис. 3), то наименьшее значение AD равно высоте треугольника AB_1C, опущенной на сторону B_1C, или меньшей из сторон AB_1 и AC (так как угол B_1AC острый, то один из прилежащих к стороне B_1C углов может быть тупым). Наибольшая сумма расстояний до прямой l от вершин B_1 и C при этом не превосходит отрезка B_1C. Из треугольников ABC и AB_1C следует, что $BC > B_1C$. Таким образом, если в треугольнике ABC угол A тупой, то искомая прямая l перпендикулярна BC и наибольшая сумма расстояний до нее от вершин B и C равна стороне BC.

Поменяв местами обозначения точек B и B_1, получим следующий вывод: если в треугольнике ABC угол A острый, то искомая прямая l перпендикулярна B_1C или медиане AM треугольника ABC, так как AM — средняя линия треугольника BB_1C, а наибольшая сумма расстояний от вершин B и C до нее равна отрезку B_1C или удвоенной медиане AM.

Наконец, если угол A прямой, то треугольники ABC и AB_1C равны и $BC = B_1C$. Следовательно, задача имеет два решения: одна прямая перпендикулярна стороне BC, вторая — медиане AM треугольника ABC.

Рассмотрим еще три связанные между собой задачи.

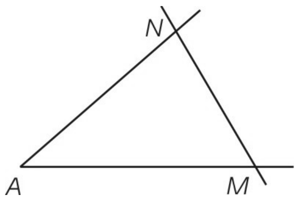

Рис. 4

Задача 4 (вспомогательная). Прямая MN отсекает от данного угла треугольник данной площади Q (M и N — точки на сторонах угла A). При каком условии отрезок MN имеет наименьшую длину и какова эта длина?

Решение. Обозначив отрезки AM и AN (рис. 4) соответственно через x и y, по теореме косинусов получим

$$MN^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos A = (x-y)^2 + 2xy(1-\cos A) = = (x-y)^2 + 4Q\,tg\frac{A}{2},$$

так как $\frac{1}{2}xy\sin A = Q$. Следовательно, при $x = y$ $(AM = AN)$ отрезок MN имеет наименьшую длину, равную $\sqrt{4Q\,tg\frac{A}{2}}$.

Задача 5. На сторонах AB и AC треугольника ABC найти соответственно точки M и N так, чтобы треугольник ABC делился отрезком MN на две равновеликие части и чтобы отрезок MN имел наименьшую длину.

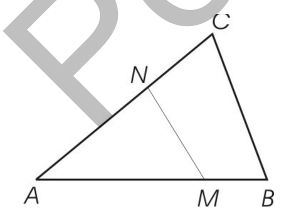

Рис. 5

Решение. Пусть MN — искомый отрезок (рис. 5).

Обозначим площадь треугольника ABC через S, тогда площадь треугольника AMN равна $\frac{1}{2}S$. Согласно предыдущей задаче

$$AM = AN \text{ и } MN = \sqrt{2S\,tg\frac{A}{2}}.$$

Выразим отрезок AM через стороны b и c треугольника ABC. Так как площадь треугольника AMN составляет половину площади треугольника ABC, то $AM^2\sin A = \frac{1}{2}bc\sin A$, откуда $AM = \sqrt{\frac{bc}{2}}$.

По условию точки M и N должны лежать на сторонах AB и AC треугольника. Значит, полученное выражение для AM является решением задачи лишь при условии, что $\sqrt{\frac{bc}{2}}$ не больше каждой из сторон b и c треугольника. Пусть $b \le c$. Тогда $\sqrt{\frac{bc}{2}} \le b$ в том и только в том случае, если $c \le 2b$.

Итак, если $b \le c \le 2b$, то на сторонах AB и AC треугольника строим точки M и N такие, что

$$AM = AN = \sqrt{\frac{bc}{2}}.$$

Если $c > 2b$, то искомым отрезком является медиана треугольника, проведенная к стороне c, причем длина этой медианы более $\sqrt{2S\,tg\frac{A}{2}}$.

Задача 6. Данный треугольник ABC разделить отрезком наименьшей длины на две равновеликие части.

Решение. Пусть $a < b < c$. Тогда $c < a + b < 2b$, т.е. $b < c < 2b$. Как показано выше, длина наименьшего отрезка MN, отсекающего от данного треугольника ABC треугольник площади $\frac{1}{2}S$ с углом A, равна $\sqrt{2S\,tg\frac{A}{2}}$. Отрезок MN и является искомым, так как он меньше наименьших отрезков, отсекающих треугольники с углами B и C:

$$\sqrt{2S\,tg\frac{A}{2}} < \sqrt{2S\,tg\frac{B}{2}} < \sqrt{2S\,tg\frac{C}{2}}.$$

Таким образом, на сторонах наименьшего угла A треугольника ABC нужно построить точки M и N так, чтобы

$$AM = AN = \sqrt{\frac{bc}{2}}.$$

В качестве подготовительной может быть предложена задача, которая не связана с основной задачей общей проблемой оптимизации. Однако ее выводы успешно применяются при решении задач на максимум и минимум.

Рассмотрим пример.

Задача 7 (вспомогательная). В треугольнике ABC медианы AD, BF и CE пересекаются в точке O. Доказать, что треугольники AOB, AOC и BOC равновелики, т.е. $S_{AOB} = S_{AOC} = S_{BOC}$.

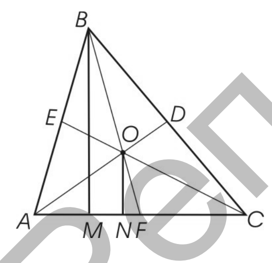

Рис. 6

Решение. Пусть BM и ON — высоты треугольников ABC и AOC соответственно (рис. 6).

Так как у этих треугольников равны основания, то их площади относятся как высоты, т.е. $\frac{S_{ABC}}{S_{AOC}} = \frac{BM}{ON}$. Из подобия треугольников BMF и ONF следует, что

$$\frac{BM}{ON} = \frac{BF}{OF} = \frac{BF}{\frac{1}{3}BF} = 3,$$

откуда $S_{ABC} = 3S_{AOC}$. Аналогично можно доказать, что $S_{ABC} = 3S_{AOB}$ и $S_{ABC} = 3S_{BOC}$, а значит, $S_{AOB} = S_{AOC} = S_{BOC}$.

Задача 8. Внутри треугольника ABC найти точку O, для которой произведение длин перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны треугольника, достигает наибольшего значения.

Решение. Пусть стороны данного треугольника имеют длины a, b и c, длины перпендикуляров, опущенных на эти стороны, соответственно h_a, h_b и h_c (рис. 7).

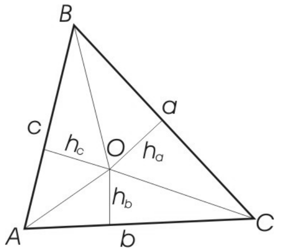

Рис. 7

Тогда $ah_a + bh_b + ch_c = 2S$, где S — площадь данного треугольника. Сумма $ah_a + bh_b + ch_c$ остается постоянной. Поэтому произведение $ah_a \cdot bh_b \cdot ch_c$ достигает наибольшего значения, когда $ah_a = bh_b = ch_c$.

Вместе с $ah_a \cdot bh_b \cdot ch_c$ достигает наибольшего значения и произведение $h_a \cdot h_b \cdot h_c$, так как $a \cdot b \cdot c$ постоянно.

Эти значения h_a, h_b, h_c соответствуют такому положению точки O, при котором $S_{AOB} = S_{AOC} = S_{BOC}$. Эта точка O есть точка пересечения медиан треугольника.

Таким образом, рассмотренные экстремальные задачи богаты математическим содержанием, решаются различными способами, что вызывает у учащихся интерес к геометрии.

References

1. *Gotman E.G.* Some tasks for minimum and maximum // Mathematics in school. — 1965. — № 1. — P. 19–22.
2. *Fominih J.* One task — some methods // Mathematics. — 2001. — № 31. — P. 8–12.
3. *Sharigina I.F.* The solution of the tasks: Tutorial for 10th form school pupils. — M.: Education, 1994.

УДК 517.51

Новый метод нахождения частичной суммы степеней натуральных чисел

The new method of finding of partial sum of degrees of the natural numbers

Дюсембаева Л.К., Башеева А.О.

Казахский агротехнический университет им. С.Сейфуллина, Астана (E-mail: basheeva@mail.ru)

Мақалада натурал сандардың дәрежелерінің қосындысын аналитикалық түрде табу зерттеледі. Математикалық талдау курс оқулықтарында негізгі бірінші ретті дәреже қосындысы қарастырылады, ал екінші ретті дәреже қосындысы жиі қарастырылмайды. Натурал сандардың дәрежелерінің қосындысын алгоритмдік тәсілмен табу ұсынылған. Әдіс натурал сандардың бірінші, екінші және үшінші ретті дәрежелерін табу мысалдар арқылы бейнеленген. Ұсынылып отырған алгоритм кез келген оң бүтін дәрежелі натурал сандардың қосындыларын қарастыруға мүмкіндік береді.

In the work the question on a finding of an analytical kind of the partial sum of degrees of natural numbers is considered. In a training course of the mathematical analysis given question is considered basically for the sum of degrees of the first order and seldom the second. In article the algorithmic method of calculation partial degrees of natural numbers is offered. The method is illustrated on examples of calculation of the partial sums of degrees of the first, the second and the third usages. The algorithm allows considering sums basically any positive whole degrees of natural numbers.

Введение

Цель изучения высшей математики студентами, будущими учителями физики, как нам представляется, состоит в освоении ими основных понятий, идей и методов математики, причем без излишнего углубления в логически обосновательный аспект, и их практическом использовании при изучении курса физики.

В рамках любого «программного» раздела высшей математики для физиков-учителей есть свои методические вопросы, нуждающиеся в специальной проработке, с целью прояснить их сущность и сделать их более доступными для физиков.