ӘОЖ 539.3(043.3)

Стерженден мен қабықшалар үшін тербеліс есебі

Problem of the fluctuation for pegs and shell

Сейтмұратов А.Ж.

Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті

В статье изучены поведение материалов, которые описываются в рамках линейной теории вязкоупругости, и общая краевая задача для стержней и оболочки. Здесь они рассматриваются как трёхмерные сплошные деформируемые тела.

In given article is considered behaviors material which are described within the framework of linear theory vyascouprugotion and the general marginal problem for pegs and shells. The problem is solved by the method of obtaining the approximate frequency equations based on the decomposition method

Стерженден және қабықшалар үшін есепті құру барысында материалдың күйі байламалы-серпімділіктің сызықтық теориясында сипатталатын үш өлшемді тегіс деформацияланатын дене ретінде қарастырылды.

Стерженнің немесе қабықшаның материалы z изотропиясының осінде изотропты және трансверсальді-изотропты, бір текті және байламалы-серпімді болып келеді.

(r,θ,z) цилиндрлік координат жүйесінде $r_0 = F(z)$ айнымалы радиустың дөңгелек стерженедері мен сыртқы және ішкі радиустары $r_1 = F_1(z)$, $r_2 = F_2(z)$ тең болатын айнымалы цилиндрлік қабықша қарастырылады.

Күштенудің деформацияға тәуелділігі стерженнің және үш өлшемді деформацияланатын дене секілді цилиндрлік қабықшаның нүктелерінде мынадай түрге ие болады:

$$\begin{gathered}
\sigma_{rr} = A_{11}(\varepsilon_{rr}) + A_{12}(\varepsilon_{\theta\theta}) + A_{13}(\varepsilon_{zz});\\
\sigma_{\theta\theta} = A_{12}(\varepsilon_{rr}) + A_{11}(\varepsilon_{\theta\theta}) + A_{13}(\varepsilon_{zz});\\
\sigma_{zz} = A_{13}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) + A_{33}(\varepsilon_{zz});\\
\sigma_{\theta z} = A_{44}(\varepsilon_{\theta z}) \qquad \sigma_{zr} = A_{44}(\varepsilon_{zr});\\
\sigma_{r\theta} = A_{66}(\varepsilon_{r\theta}),
\end{gathered} \tag{1}$$

мұндағы A_{ij} — байламалы-серпімділік операторлары.

$$A_{ij}(\zeta) = a_{ij}\left[\zeta(t) - \int_0^t f_{ij}(t-\xi)\zeta(\xi)d\xi\right],$$

a_{ij} – серпімділік тұрақтысы.

Цилиндрлік координат жүйесінде ε_{ij} деформациясының u_r, u_θ, u_z ауыспалылығына тәуелділігі механикадағы деформацияланатын қатты дененің белгілі формуласы бойынша анықталады:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r};\\
\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r};\\
\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z};\\
\varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta};\\
\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z};\\
\varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Күштенудегі қозғалыстың теңдеуі мынаған тең:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial z}+\frac{2\partial^2 u_\theta}{r}=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.$$

Φ және $\overrightarrow{\psi}$ потенциалдарының бойламалы және көлденең толқындарының енгізілуінде изотропты материалдың жағдайы мынадай болады:

$$\overrightarrow{U}=grad\ \Phi+rot\overrightarrow{\psi};\ \ \overrightarrow{\psi}=\overrightarrow{e_z}\psi_1+rot(\overrightarrow{e_z}\psi_2), \tag{4}$$

қозғалыстың теңдеуі интегро-дифференциалданған теңдеуге тура келеді

$$N(\Delta\Phi)=\rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},\ \ M(\Delta\overrightarrow{\psi})=\rho\frac{\partial^2\overrightarrow{\psi}}{\partial t^2};\ N{=}L{+}2M, \tag{5}$$

ал ауыспалылық және потенциалдар бойынша деформация келесі формула түрінде көрсетіледі:

$$u_r=\frac{\partial}{\partial r}\left[\Phi+\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}; \tag{6}$$

$$u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\Phi+\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right]-\frac{\partial\psi_1}{\partial r};$$

$$u_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\psi^2$$

және

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\Phi+\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right]-\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}-\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta};$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\Phi+\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}-\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_1\right];$$

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\psi_2; \tag{7}$$

$$\varepsilon_{rz}=2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta\partial z}+\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\psi_2;$$

$$\varepsilon_{r\theta}=\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\right)\Phi+\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]\psi_1+\frac{2}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\right)\psi_2;$$

$$\varepsilon_{z\theta}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}-\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\psi_2;$$

$$\varepsilon=\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz}=\Delta\Phi.$$

Бастапқы шарттар нолге тең, яғни

$$u_j=\frac{\partial u_j}{\partial t}=0\quad(t=0,\ j=r,\theta,z), \tag{8}$$

сондай – ақ потенциалдар үшін де

$$\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0;$$

$$\psi_j=\frac{\partial\psi_j}{\partial t}=0\qquad(t=0,\ j=1,2).$$

Қарастырылған есептің шамасына қарай үш шеткері шарттар негізінде әр түрлі типті үш өлшемді дененің бетінде шектеулі шарттар қарастырылады, сондықтан, төменде көрсетілгендей етіп, бірнешеуін түрлендірейік.

1. Егер стерженнің немесе қабықшаның ішкі және сыртқы беттері ішкі және сыртқы ортамен бірлеспейтін болса, жалпы жағдайда r_0 немесе r_1, r_2 радиустары z осьтік координатына тәуелді болады. Онда күштену үшін шеткері шарттар мынадай түрге ие болады:

$$\frac{1}{\Delta_0^2}\sigma_{rr}+\frac{\left(r_{jz}^{'}\right)}{\Delta_0^2}\sigma_{zz}+\frac{2\left(-1\right)^j r_{jz}^{'}}{\Delta_0^2}\sigma_{rr}=f_{nn};$$

$$\frac{1}{\Delta_0}\sigma_{r\Theta}+\frac{\left(-1\right)^j r_{jz}^{'}}{\Delta_0}\sigma_{\Theta z}=f_{ns_1}; \tag{9}$$

$$\frac{\left(-1\right)^{1+j} r_{jz}^{'}}{\Delta_0^2}\left(\sigma_{rr}-\sigma_{zz}\right)+\frac{1-\left(r_{jz}^{'}\right)^2}{\Delta_0^2}\sigma^{rz}=f_{ns_2};$$

$$\Delta_0^2=1+\left(r_j^{'}\right)^2;\ \left(j=1,2\right);\ r_i=F_i\left(z\right);$$

$r_1=0$ стержені үшін, ал $r_2=r_0$.

2. Егер стержень немесе цилиндрлік қабықша деформацияланатын ортамен бірлесетін болса және олардың радиустары тұрақты болған жағдайда, онда шеткері шарттар мынадай түрге ие болады:

– идеалды байланыс негізінде

$$\begin{gathered}\sigma_{rr}=\sigma_{rr}^{(i)}+f_r^{(i)}\left(\theta,z,t\right);\\ \sigma_{jr}=0;\\ \sigma_{jr}^{(i)}+f_{jr}^{(i)}\left(\theta,z,t\right)=0;\\ u_r=u_r^{(i)}+f_0^{(i)}\left(\theta,z,t\right);\\ \left(r=r_i\right);\ i=1,2;\ j=\theta,z;\end{gathered} \tag{10}$$

– қатты байланыс жағдайында

$$\begin{gathered}\sigma_{rr}=\sigma_{rr}^{(i)}+f_r^{(i)}\left(\theta,z,t\right);\\ \sigma_{jr}=\sigma_{jr}^{(i)}+f_{jr}^{(i)}\left(\theta,z,t\right);\\ u_r=u_r^{(i)}+f_0^{(i)};\\ u_\theta=u_\theta^{(j)}+f_1^{(j)};\\ u_z=u_z^{(j)}+f_2^{(j)};\quad r=r_j;\end{gathered} \tag{11}$$

– Кулон шарты бойынша құрғақ трен болған жағдайда

$$\begin{gathered}\sigma_{rr}=\sigma_{rr}^{(i)}+f_r^{(i)}\left(\theta,z,t\right);\\ \sigma_{jr}=\eta_i\sigma_{rr};\\ u_r=u_r^{(j)}+f_0^{(j)};\\ \sigma_{ir}^{(j)}+f_{ir}^{j}=-\eta_i\left(\sigma_{rr}^{j}\right)+f_r^{(j)},\end{gathered} \tag{12}$$

мұндағы $\left|\eta_j\right|$ – трен коэффициенттері.

$\sigma_{ij}\sim\varepsilon_{ij}$ сызықтық емес тәуелділіктің шығарылымы үшін келесі шартты міндетті түрде орындау керек [1]:

1. A деформациясының меншікті жұмысы D тензор деформациясы компонентінің бірдей функциясы болуы керек.

2. Дене материалы бір текті және изотропты болуы қажет.

3. Гук заңындағы секілді T_0 кернеуінің шарлық тензоры D_0 деформациясының шарлық тензорынан тұрады, ал T' кернеуінің девиатор тензоры D' деформациясының девиатор тензорынан тұрады.

4. Заңға орнатылған шағын деформация шексіз болуы үшін Гук заңының формасына сәйкес келуі керек (13).

Осыған сәйкес A меншікті жұмысы үшін түрлендірілген шарт орындалуы қажет, және келесі мәнді аламыз.

Байламалы-серпімділіктің сызықтық теориясы жады эффектісіне негізделген, яғни кернеудің деформациядан сызықтық интегралдық тәуелділігіне. Сонда сызықтық серпінді дене үшін (12 заңын байламалы – серпімді дене үшін жазуға болады

$$\sigma_0 = 3KR_0(\varepsilon_0);\ T' = 2GR(D'), \tag{13}$$

мұндағы R_0 және R — вольтерлік операторлар типіндегі сызықтық интегралды операторлар:

$$\begin{aligned} R_0(\zeta) &= \zeta(t) - \int_0^t F_{10}(t-\xi)\zeta(\xi)d\xi; \\ R(\zeta) &= \zeta(t) - \int_0^t F_{20}(t-\xi)\zeta(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{14}$$

$F_{j0}(t)$ – осы операторлардың ядросы.

(13) заңының қорытындысы ретінде A деформациясының меншікті жұмысы үшін келесі мәнді алуға болады [2]:

$$A = A_0 + A'. \tag{15}$$

(15) заңының таратылымы үшін байламалы-серпімді денені шарттар қатарымен түрлендірейік.

1. A деформациясының меншікті жұмысы деформацияланудың барлық тарихында t уақытымен қазіргі кезге дейін бір мәнді функция болуы қажет.

2. Байламалы-серпімді дененің материалы біртекті және изотропты.

3. T' кернеуінің девиатор тензоры D' девиаторы тарихының өзгерісіне тәуелді болады, ал σ_0 орташа кернеу ε_0 орташа деформациясы тарихының өзгерісіне тәуелді болады.

Шексіз шағын деформация үшін $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ тәуелділігінің сызықтық емес заңдылығы байламалы-серпімді дененің теориясында сызықтық заңдылығына өтуі керек.

Берілген шартқа сәйкес A деформациясының меншікті жұмысы үшін келесі есептеуді аламыз:

$$A(x,y,z) = \rho_0(I_1) + \rho_1(\psi_0^2), \tag{16}$$

мұндағы ρ_0 және ρ_1 — сызықтық функционалдар.

Сонда байламалы-серпімді дене үшін $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ тәуелділігінің сызықтық емес заңдылығы келесі тәуелділікпен сипатталады:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 3KR_0\left[r_0(\varepsilon_0)\varepsilon_0\right]; \\ T' &= 2GR\left[r_0(\psi_0^2)D'\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

References

1. *Filippov A.I.* Spreading the waves in упругом стержне, surrounded by ambience of the type Vinkler // Vestnik MGU. — Ser. 1. The Mathematics, mechanics. — 1983.
2. *Gelyukh P.A., Filippov S.I.* The fluctuations of beforehand-tense transversal isotropic plate. // Sb. Doc. conf. «Fundamental sciences in modern construction». — M.: MUSU, 2001.