УДК 517.95

А.Ж.Жакупбекова, Б.С.Кошкарова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

О СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА

Мақалада годограф жазықтықтың шектелген облысында анықталған кейбір сингулярлық операторлар қарастырылады. Олардың Гельдер салмақты кеңістіктегі қасиеттері қарастырылады және шектелігі туралы теоремалар дәлелденеді.

This article are considered the singular integral operators, defined in a limited area of the hodograph plane. Properties of operators in a weighted Holder space are investigated. Theorems about their limitation in the given space are proved.

В области $K = K\left\{z : |z| < 1\right\}$ комплекснозначной плоскости $z = x + iy$ рассмотрим операторы

$$\Pi_1\rho = -\frac{\overline{w}}{\pi}\iint_K \frac{\overline{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{(1-\overline{\zeta}w)^2}d\xi d\eta\,,\ \zeta = \xi + i\eta\,; \tag{1}$$

$$T_1\rho = -\frac{1}{\pi}\iint_K \frac{\overline{\rho(\zeta)}}{1-\overline{\zeta}z}d\xi d\eta\,. \tag{2}$$

Подобного рода операторы возникают при исследовании некоторых задач математической физики, гидродинамики, решение которых сводится к решению интегральных уравнений, содержащих различные интегральные операторы. Свойства операторов (1) и (2) ранее были исследованы в весовом классе Гельдера $C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$, $0 < \mu < 1$ [1]. В данной работе мы хотим обобщить полученные ранее результаты на весовое пространство $C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)$, $0 < \mu < 1$, $0 \le \lambda \le 1$, k — целое число, $k + \lambda < 0$, где норма задается равенством [2]

$$\|\rho\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}} = r^{\mu-k-\lambda}_{w\cup\zeta}\frac{|\rho(w)-\rho(\zeta)|}{|w-\zeta|^{\mu}} + \sup_{w\in G}|\rho(w)|\cdot r_w^{-(k+\lambda)}\,, \tag{3}$$

а весовую функцию $r_{w\cup\zeta}$ возьмем как минимальное расстояние от точек $w,\zeta \in K$ до точек единичной окружности $\Gamma = \partial K$: $t^* = \{-1,1\}$, т.е.

$$r_{w\cup\zeta} = \min\{|w-t^*|,|\zeta-t^*|\}\,.$$

Теорема 1. *Пусть* $\rho \in C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)$, $0 < \mu < 1$, $0 \le \lambda \le 1, \mu - k - \lambda < 2$. *Тогда* $\Pi_1\rho$ *является линейным ограниченным оператором в* $C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)$, *отображающим его в себя.*

Доказательство.

Запишем оператор (1), обозначив через функцию $g(w) = \Pi_1\rho(w)$, в виде

$$g_1(w) = \frac{\overline{w}}{\pi}\iint_K \frac{\overline{\zeta}\left(\overline{\rho(\zeta)}-\overline{\rho(w)}\right)}{\left(1-\overline{\zeta}w\right)^2}d\xi d\eta + \frac{\overline{w}\overline{\rho(w)}}{\pi}\iint_K \frac{\overline{\zeta}}{\left(1-\overline{\zeta}w\right)^2}d\xi d\eta\,. \tag{4}$$

Поскольку (см. [3])

$$\frac{1}{\pi}\iint_K \frac{d\xi d\eta}{1-\overline{\zeta}w} = 1\,,\ w\in K\,, \tag{5}$$

то

$$\frac{1}{\pi}\iint_K \frac{\overline{\zeta}d\xi d\eta}{(1-\overline{\zeta}w)^2} = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\pi}\iint_K \frac{d\xi d\eta}{1-\overline{\zeta}w}\right) = 0\,,\ w\in K\,. \tag{6}$$

Тогда для $|\zeta| < 1$ и $|w| < 1$ из (4) на основании (6) имеем

$$\left|g_1(w)\right| \le \frac{|\overline{w}|}{\pi}\iint_K \frac{|\overline{\zeta}|\left|\overline{\rho(\zeta)}-\overline{\rho(w)}\right|}{\left|\zeta-w\right|^{\mu}}r^{\mu-k-\lambda}_{\zeta\cup w}\cdot\frac{\left|\zeta-w\right|^{\mu}r^{-(\mu-k-\lambda)}_{\zeta\cup w}}{\left|1-\overline{\zeta}w\right|^2}d\xi d\eta \le \frac{\|\rho\|}{\pi}\iint_K \frac{\left|\zeta-w\right|^{\mu}r^{-(\mu-k-\lambda)}_{\zeta\cup w}}{\left|1-\overline{\zeta}w\right|^2}d\xi d\eta. \tag{7}$$

Здесь нам понадобится оценить интеграл вида

$$J_1 = \frac{1}{\pi}\iint_K \frac{|\zeta - w|^{\mu}\, r_{\zeta\cup w}^{-(\mu-k-\lambda)}}{|1-\overline{\zeta}w|^2}\, d\xi d\eta.$$

Рассмотрим два случая

1. Пусть $|w| \le \frac{1}{2}$, тогда $|1-\overline{\zeta}w| \ge 1 - |\zeta||w| \ge \frac{1}{2}$, значит,

$$J_1 \le \frac{2^{\mu+2}}{\pi}\iint_K \frac{d\xi d\eta}{r_{\zeta\cup w}^{\mu-k-\lambda}} \le 2^{\mu+2}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\pi}\iint_{K_i\cap K}\frac{d\xi d\eta}{r_{\zeta\cup w}^{\mu-k-\lambda}} + \frac{1}{\pi}\iint_{K\setminus\bigcup K_i}\frac{d\xi d\eta}{r_{\zeta\cup w}^{\mu-k-\lambda}}\right).$$

Здесь и далее через K_i, $i=\overline{1,2}$, обозначим круг радиуса $\frac{r_w}{2}$ с центром в точке $t^* = \{-1,1\}$. Для $\zeta \in K_i \cap K$, $\forall i = \overline{1,2}$ имеем $r_{\zeta\cup w} = r_\zeta$, а для $\zeta \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{2} K_i$ выполняется неравенство $r_{\zeta\cup w} \ge \frac{r_w}{2}$. Тогда

$$J_1 \le 2^{\mu+2}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\pi}\iint_{K_i}\frac{d\xi d\eta}{r_{\zeta}^{\mu-k-\lambda}} + \left(\frac{2}{r_w}\right)^{\mu-k-\lambda}\frac{1}{\pi}\iint_{\tilde{K}} d\xi d\eta\right) \le 2^{\mu+1}\left(\frac{4}{\pi}\iint_{K_i}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta - t_i|^{\mu-k-\lambda}} + \left(\frac{2}{r_w}\right)^{\mu-k-\lambda}\cdot 2^{2n} r_w^2\right) \le$$

$$\le 4\cdot\frac{2^{2+\lambda+k-\mu}}{1+\lambda+k-\mu}\left(\frac{r_w}{2}\right)^{2+\lambda+k-\mu} + 2^{2n+\mu-k-\lambda+1} r_w^{2+k+\lambda-\mu} \le r_w^{2+k+\lambda-\mu}\left(\frac{8}{1+k+\lambda-\mu} + 2^{2n+\mu-k-\lambda+1}\right) \le C_1, \qquad (8)$$

где $\tilde{K}$ — круг радиуса $2^n r_w < 2$: $K \subset \tilde{K}$, а через C_i будем обозначать постоянные величины.

2. В случае, когда $|w| > \frac{1}{2}$, поступим следующим образом:

$$J_1 = \frac{1}{\pi}\iint_K \frac{|\zeta - w|^{\mu}\, r_{\zeta\cup w}^{-(\mu-k-\lambda)}}{|w|^2\left|\zeta - \frac{1}{\overline{w}}\right|^2}\, d\xi d\eta.$$

Если $w \in K$, то $w^* = \frac{1}{\overline{w}}$ будет лежать вне круга K и $|w^*| = \frac{1}{|\overline{w}|} \ge |w|$, поскольку $1 \ge |w|^2$. Заметим, что всегда для любого $w \in K$ имеет место неравенство $1 - |w| \le |w^*| - 1$. Геометрически это означает, что точка w расположена всегда ближе к окружности Γ, чем ее отражение w^* относительно той же окружности. Поэтому всегда выполняется неравенство

$$|\zeta - w| \le |\zeta - w^*|. \qquad (9)$$

Тогда

$$J_1 \le \frac{4}{\pi}\iint_K \frac{d\xi d\eta}{r_{\zeta\cup w}^{\mu-k-\lambda}|\zeta - w|^{2-\mu}} \le \sum_{i=1}^{2}\frac{4}{\pi}\iint_{K_i\cap K}\frac{d\xi d\eta}{r_{\zeta\cup w}^{\mu-k-\lambda}\,|\zeta - w|^{2-\mu}} + \frac{4}{\pi}\iint_{K\setminus\bigcup K_i}\frac{d\xi d\eta}{r_{\zeta\cup w}^{\mu-k-\lambda}\,|\zeta - w|^{2-\mu}} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{r_w}\right)^{2-\mu}\sum_{i=1}^{2}\frac{4}{\pi}\iint_{K_i\cap K}\frac{d\xi d\eta}{r_{\zeta}^{\mu-k-\lambda}} + \left(\frac{2}{r_w}\right)^{\mu-k-\lambda}\frac{4}{\pi}\iint_{\tilde{K}}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta - w|^{2-\mu}} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{r_w}\right)^{2-\mu}\frac{8}{\pi}\iint_{K_i}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta - t_i|^{\mu-k-\lambda}} + \left(\frac{2}{r_w}\right)^{\mu-k-\lambda}\frac{2^{\mu+1}}{\mu}(2^n r_w)^{\mu} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{r_w}\right)^{2-\mu}\frac{2^{6-(\mu-k-\lambda)}}{2-\mu+k+\lambda}\left(\frac{r_w}{2}\right)^{2-(\mu-k-\lambda)} + \frac{2^{\mu(n+2)+2}}{\mu} r_w^{\,k+\lambda} \le$$

$$\le r_w^{\,k+\lambda}\left(\frac{2^{6-\mu}}{2-\mu+k+\lambda} + \frac{2^{\mu(n+2)+2}}{\mu}\right) \le C_2\cdot r_w^{\,k+\lambda}. \qquad (10)$$

Сравнив коэффициенты оценок (8) и (10), находим

$$J_1 \le M_1\cdot r_w^{\,k+\lambda}. \qquad (11)$$

Следовательно, из (7) на основании (11) имеем, что при выполнении условия $\mu - k - \lambda < 2$

$$\left|g_1(w)\right| r_w^{-(k+\lambda)} \le \frac{\|\rho\| r_w^{-(k+\lambda)}}{\pi} \iint_K \frac{\left|\zeta - w\right|^{\mu} r_{\zeta \cup w}^{-(\mu-k-\lambda)}}{\left|1-\overline{\zeta} w\right|^2} d\xi d\eta \le M_1 \|\rho\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)}, \tag{12}$$

где $M_1 = const$, не зависящая от функции ρ.

Для двух различных точек w, $w_1 \in K$ имеем

$$g_1(w_1) - g_1(w) = \frac{\overline{w}_1(w_1 - w)}{\pi} \iint_K \frac{\overline{\zeta}^2\left(\overline{\rho(\zeta)} - \overline{\rho(w_1)}\right)}{\left(1-\overline{\zeta} w_1\right)^2 \left(1-\overline{\zeta} w\right)} d\xi d\eta + \frac{\overline{w}(w_1 - w)}{\pi} \iint_K \frac{\overline{\zeta}^2\left(\overline{\rho(\zeta)} - \overline{\rho(w)}\right)}{\left(1-\overline{\zeta} w\right)^2 \left(1-\overline{\zeta} w_1\right)} d\xi d\eta +$$

$$+ \frac{\overline{w}_1 - \overline{w}}{\pi} \iint_K \frac{\overline{\zeta}\left(\overline{\rho(\zeta)} - \overline{\rho(w)}\right)}{\left(1-\overline{\zeta} w_1\right)\left(1-\overline{\zeta} w\right)} d\xi d\eta + \frac{\overline{w}_1(w_1 - w)\overline{\rho(w_1)}}{\pi} \iint_K \frac{\overline{\zeta}^2}{\left(1-\overline{\zeta} w_1\right)^2 \left(1-\overline{\zeta} w\right)} d\xi d\eta +$$

$$+ \frac{\overline{w}(w_1 - w)\overline{\rho(w)}}{\pi} \iint_K \frac{\overline{\zeta}^2}{\left(1-\overline{\zeta} w_1\right)\left(1-\overline{\zeta} w\right)^2} d\xi d\eta + \frac{(\overline{w}_1 - \overline{w})\overline{\rho(w)}}{\pi} \iint_K \frac{\overline{\zeta}}{\left(1-\overline{\zeta} w_1\right)\left(1-\overline{\zeta} w\right)} d\xi d\eta. \tag{13}$$

Так как в силу (5)

$$\frac{1}{\pi} \iint_K \frac{\overline{\zeta}}{\left(1-\overline{\zeta} w_1\right)\left(1-\overline{\zeta} w\right)} d\xi d\eta = \frac{1}{w_1 - w}\left(-\frac{1}{\pi} \iint_K \frac{d\xi d\eta}{1-\overline{\zeta} w} + \frac{1}{\pi} \iint_K \frac{d\xi d\eta}{1-\overline{\zeta} w_1}\right) = 0 \quad \forall w, w_1 \in K, \tag{14}$$

то

$$\frac{1}{\pi} \iint_K \frac{\overline{\zeta}^2}{\left(1-\overline{\zeta} w_1\right)\left(1-\overline{\zeta} w\right)^2} d\xi d\eta = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\pi} \iint_K \frac{\overline{\zeta}}{\left(1-\overline{\zeta} w_1\right)\left(1-\overline{\zeta} w\right)} d\xi d\eta\right) = 0 \quad \forall w, w_1 \in K.$$

Тогда для $\forall w, w_1 \in K : |w| < 1, |w_1| < 1$ из равенства (13) имеем

$$\left|g_1(w_1) - g_1(w)\right| \le \frac{|w_1 - w|}{\pi} \iint_K \frac{\left|\rho(\zeta) - \rho(w_1)\right|}{\left|\zeta - w_1\right|^{\mu}} r_{\zeta \cup w_1}^{\mu-k-\lambda} \cdot \frac{\left|\zeta - w_1\right|^{\mu} r_{\zeta \cup w_1}^{-(\mu-k-\lambda)}}{\left|1-\overline{\zeta} w_1\right|^2 \left|1-\overline{\zeta} w\right|} d\xi d\eta +$$

$$+ \frac{|w_1 - w|}{\pi} \iint_K \frac{\left|\rho(\zeta) - \rho(w)\right|}{\left|\zeta - w\right|^{\mu}} r_{\zeta \cup w}^{\mu-k-\lambda} \cdot \frac{\left|\zeta - w\right|^{\mu} r_{\zeta \cup w}^{-(\mu-k-\lambda)}}{\left|1-\overline{\zeta} w\right|^2 \left|1-\overline{\zeta} w_1\right|} d\xi d\eta +$$

$$+ \frac{|w_1 - w|}{\pi} \iint_K \frac{\left|\rho(\zeta) - \rho(w)\right|}{\left|\zeta - w\right|^{\mu}} r_{\zeta \cup w}^{\mu-k-\lambda} \cdot \frac{\left|\zeta - w\right|^{\mu} r_{\zeta \cup w}^{-(\mu-k-\lambda)}}{\left|1-\overline{\zeta} w\right| \left|1-\overline{\zeta} w_1\right|} d\xi d\eta \le |w_1 - w|^{\mu} \|\rho\| \left(2J_2(2) + J_2(1)\right), \tag{15}$$

где

$$J_2(\alpha) = \frac{|w_1 - w|^{1-\mu}}{\pi} \iint_K \frac{\left|\zeta - w\right|^{\mu} r_{\zeta \cup w}^{-(\mu-k-\lambda)}}{\left|1-\overline{\zeta} w\right|^{\alpha} \left|1-\overline{\zeta} w_1\right|} d\xi d\eta, \quad \alpha = 1, 2.$$

Данный интеграл при выполнении условия $\mu - k - \lambda < 2$ имеет следующую оценку [4]:

$$J_2(\alpha) \le \frac{C_3}{r_{w \cup w_1}^{\mu-k-\lambda}}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{16}$$

Тогда на основании полученной оценки (16) из (15) будем иметь

$$\frac{\left|g_1(w_1) - g_1(w)\right|}{|w_1 - w|^{\mu}} \cdot r_{w_1 \cup w}^{\mu-k-\lambda} \le M_2 \|\rho\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)}. \tag{17}$$

Таким образом, на основании равенства (3) с учетом оценок (12) и (17) получим

$$\left\|\Pi_1 \rho(w)\right\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)} = \left\|g_1(w)\right\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)} = \frac{\left|g_1(w_1) - g_1(w)\right|}{|w_1 - w|^{\mu}} \cdot r_{w_1 \cup w}^{\mu-k-\lambda} + \left|g_1(w)\right| r_w^{-(k+\lambda)} \le (M_1 + M_2) \|\rho\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)},$$

что и требовалось доказать. ■

Теперь исследуем свойства оператора $\mathrm{T}_1\rho$ вида (2) в весовом классе Гельдера $C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)$. Оператор $\mathrm{T}_1\rho$ можно представить в виде

$$\mathrm{T}_1\rho = -\frac{1}{w}\int_0^w \left(-\frac{\overline{w}}{\pi}\iint_K \frac{\overline{\zeta\rho(\zeta)}}{\left(1-\overline{\zeta}w\right)^2} d\xi d\eta \right) dw = \frac{1}{w}\int_0^w \Pi_1\rho dw.$$

Заметим, что $\mathrm{T}_1\rho$ представляет собой аналитическую в K, непрерывную в $\overline{K}$ функцию, следовательно, по принципу максимума модуля для аналитической функции, учитывая оценку (12), находим

$$\left|\mathrm{T}_1\rho\right| \le \max\left|\Pi_1\rho(w)\right| \le M_1 \left\|\rho\right\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)}. \tag{18}$$

Для двух различных точек w, $w_1 \in K$ разность значений оператора с учетом (14) запишем так:

$$\mathrm{T}_1(w_1) - \mathrm{T}_1(w) = -\frac{w-w_1}{\pi}\iint_K \frac{\overline{\zeta}\left(\overline{\rho(\zeta)} - \overline{\rho(w)}\right)}{\left(1-\overline{\zeta}w\right)\left(1-\overline{\zeta}w_1\right)} d\xi d\eta .$$

Отсюда в силу оценки (16) при $|\zeta| < 1$ получим

$$\left|\mathrm{T}_1(w_1) - \mathrm{T}_1(w)\right| \le \frac{|w-w_1|}{\pi}\iint_K \frac{|\overline{\zeta}|\left|\overline{\rho(\zeta)} - \overline{\rho(w)}\right|}{|\zeta - w|^{\mu}} \frac{|\zeta - w|^{\mu}\, r_{\zeta\cup w}^{-(\mu-k-\lambda)}}{\left|1-\overline{\zeta}w\right|\left|1-\overline{\zeta}w_1\right|} d\xi d\eta \le$$

$$\le |w-w_1|^{\mu} J_2(1)\|\rho\| \le \frac{|w-w_1|^{\mu}}{r_{w_1\cup w}^{\mu-k-\lambda}} C_3 \|\rho\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)}. \tag{19}$$

Следовательно, на основании (18) и (19) имеем

$$\left\|\mathrm{T}_1\rho(w)\right\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)} = \frac{\left|\mathrm{T}_1(w_1) - \mathrm{T}_1(w)\right|}{|w_1 - w|^{\mu}} \cdot r_{w_1\cup w}^{\mu-k-\lambda} + \left|\mathrm{T}_1(w)\right| r_w^{\beta} \le (C_3 + M_1)\|\rho\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)} \le M_3 \|\rho\|_{C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\rho \in C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)$, $0<\mu<1$, $0 \le \lambda \le 1$, $\mu - k - \lambda < 2$*, тогда* $\mathrm{T}_1\rho$ *является линейным ограниченным оператором, действующим из* $C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)$ *в* $C^{0,\mu}_{k,\lambda}(K)$.

Список литературы

1. *Кошкарова Б.С.* Краевая задача со свободной границей для вырождающейся эллиптической системы уравнений гидродинамики: Дис. … канд. физ.-мат. наук. — Караганда, 2004. — 95 с.
2. *Волков Е.А.* О границах подобластей, весовых классах Гельдера и решении в этих классах уравнения Пуассона // Тр. МИАН СССР. — М., 1972. — Т. 117. — С. 75–99.
3. *Игликов А.* Краевые задачи со свободной границей для систем уравнений движения несжимаемой идеальной жидкости. Вихревые кольца. — Алматы: Ғылым, 1995. — С. 61.
4. *Кошкарова Б.С.* О свойствах двух интегральных операторов в весовом пространстве Гельдера $C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$ // Вестн. Карагандинского ун-та. — 2002. — № 1(25). — С. 60–69.