ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ФИНАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ В КОНЦЕ ОТРЕЗКА И ДВУМЯ ФУНКЦИЯМИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

Юлдашев Т. К.

Ташкентский государственный экономический университет

E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Представляют большой интерес с точки зрения приложений интегро-дифференциальные уравнения типа Фредгольма [1-4].

В настоящей работе изучается разрешимость обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения Буссинеска шестого порядка с вырожденным ядром, двумя параметрами, финальными условиями в конце отрезка и двумя функциями переопределения. Данная работа отличается от существующих работ тем, что в ней требуется найти дополнительно две функции переопределения. Данная обратная задача имеет особенности по отношению к прямой задаче.

Итак, в прямоугольной области $\Omega = \{(t,x) \mid 0<t<T,\ 0<x<l\}$ рассматривается классическая разрешимость обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения типа вида

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right) - (\omega - \alpha(t))\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U(t,x) = \nu \int_0^T K(t,s) U(s,x)\, ds, \tag{1}$$

где T и l заданные положительные действительные числа, $\omega -$ положительный параметр, $\alpha(t) \in C(\Omega_T) -$ заданная непрерывная функция, $\Omega_T \equiv [0;T]$, $\Omega_l \equiv [0;l]$, $\nu -$ действительный ненулевой параметр, $0 \neq K(t,s) = \sum_{i=1}^{p} a_i(t) b_i(s)$, $a_i(t), b_i(s) \in C[0;T]$. Здесь предполагается, что система функций $a_i(t)$, $i=\overline{1,p}$ и система функций $b_i(s)$, $i=\overline{1,p}$ являются линейно независимыми.

Постановка обратной задачи. Требуется найти тройку функций

$$\left\{ U(t,x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C_{t,x}^{2,4}(\Omega) \cap C_{t,x}^{2+2}(\Omega);\ \varphi_i(x) \in C^4(\Omega_l),\ i=1,2 \right\},$$

первая из которой удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (1) и следующим условиям

$$U(T,x) = \varphi_1(x),\ \ U_t(T,x) = \varphi_2(x),\ \ x \in \Omega_l, \tag{2}$$

$$U(t,0) = U(t,l) = U_{xx}(t,0) = U_{xx}(t,l) = 0, \tag{3}$$

$$\int_0^{t_1} U(t,x)\, dt = \psi_1(x),\ \ \int_0^{t_1} e^t U_t(t,x)\, dt = \psi_2(x),\ \ x \in \Omega_l, \tag{4}$$

где $\psi_i(x) \in C^4(\Omega_l)$, $i=1,2$, $0<t_1<T$.

Выбор условий (2) с финальными функциями связан тем, что на практике не всегда возможно определить начальное условие. Например, при исследовании технологического процесса производства алюминий до начала производственного цикла сырье проходит через обжигания и состояние сырья к началу производственного цикла не известно.

Отметим, что прямая задача (1)-(3) имеет единственное решение при всех значениях параметра ω, а обратная задача (1)-(4) имеет единственное решение только при определенных значениях этого параметра ω. Кроме того, и второй параметр ν играет важную роль в вопросе разрешимости.

Нетривиальные решения обратной задачи (1)-(5) ищутся в виде ряда Фурье

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\, \vartheta_n(x),\ \ \varphi_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{in}\, \vartheta_n(x),\ \ i=1,2,$$

Buketov University

где $\vartheta_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi n}{l} x.$

Получается счетная система интегральных уравнений, существование и единственность решения которой доказывается методом последовательных приближений. Доказывается абсолютная сходимость полученных рядов Фурье и их дифференцируемость.

Список использованной литературы

1. Е. И. Ушаков, Статическая устойчивость электрических цепей. Новосибирск: Наука, 1988. 273 с.

2. M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira, Existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with strong damping // Math. Methods in the Appl. Sciences. 2001. Vol. 24. P. 1043–1053.

3. Я. В. Быков О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во Кирг. гос. унив-та, 1957. 327 с.

4. М. М. Вайнберг, Интегро-дифференциальные уравнения // Итоги науки. 1962. Москва: ВИНИТИ АН СССР, 1964. С. 5–37.

Buketov University