УДК 517.956

Н.Т.Орумбаева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің шешімін табудың конструктивті алгоритмі ұсынылады. Алгоритмнің жинақтылығының және зерттелініп отырған есептің шешілімдігінің қажетті және жеткілікті шарттары белгіленеді.

The constructional algorithm of finding periodical boundary value problem's solution for system of hyperbolic equations is offered. The necessary and sufficient conditions of algorithm's convergence and unique solvability of investigating problem are established.

На $\overline{\Omega} = [0,\omega]\times[0,T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + C(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \psi(t), \quad t\in[0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \quad x\in[0,\omega], \tag{3}$$

где ($n\times n$) — матрицы $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$, n-вектор-функция $f(x,t)$ непрерывны на $\overline{\Omega}$, n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно-дифференцируемая на $[0,T]$ и удовлетворяет условию $\psi(0)=\psi(T)$, $\|u(x,t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |u_i(x,t)|$, $\|A(x,t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|$. Пусть $C(\overline{\Omega},R^n)$ — пространство функций $u:\overline{\Omega}\to R^n$ непрерывных на $\overline{\Omega}$, с нормой $\|u\|_0 = \max\limits_{(x,t)\in\Omega}\|u(x,t)\|$.

Функция $u(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$, имеющая частные производные $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\in C(\overline{\Omega},R^n)$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\in C(\overline{\Omega},R^n)$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}\in C(\Omega,R^n)$, называется решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(x,t)\in\overline{\Omega}$ и на характеристике $x=0$ принимает заданные значения $\psi(t)$, $t\in[0,T]$ и краевым условиям (2),(3).

Краевые задачи для систем гиперболических уравнений различными методами были исследованы многими авторами, отметим лишь работы [1–5], где можно найти обзор и библиографию по указанным задачам. В работе [6] более общая нелокальная задача исследовалась методом введения функциональных параметров. Были установлены достаточные условия однозначной разрешимости в терминах коэффициентов и предложен алгоритм нахождения ее решения, каждый шаг которого состоит из двух пунктов: 1) нахождение введенных функциональных параметров; 2) нахождение решения задач Гурса на малых областях.

В настоящей работе предлагается другой алгоритм решения исходной задачи, где нет необходимости нахождения решения задач Гурса на каждом шаге алгоритма.

Введем новые неизвестные функции $v(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, w(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ и задачу (1)–(3) запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + B(x,t)w(x,t) + C(x,t)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega, \tag{4}$$

$$v(x,0) = v(x,T), \quad x\in[0,\omega], \tag{5}$$

$$u(x,t) = \psi(t) + \int_0^x v(\xi,t)d\xi, \quad t\in[0,T], \tag{6}$$

Репозиторий КарГУ

$$w(x,t)=\dot\psi(t)+\int_0^x \frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t}d\xi, \quad t\in[0,T]. \qquad (7)$$

Здесь задача нахождения решения периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений (1)–(3) сведена к семейству периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (4), (5) и функциональным соотношениям (6), (7). Задачи (1)–(3) и (4)–(7) эквивалентны в том смысле, что если функция $u^*(x,t)$, является решением задачи (1)–(3), то тройка $\left(u^*(x,t), v^*(x,t)=\dfrac{\partial u^*(x,t)}{\partial x}, w^*(x,t)=\dfrac{\partial u^*(x,t)}{\partial t}\right)$ будет решением задачи (4)–(7) и наоборот, если тройка $\left(\hat u(x,t),\hat v(x,t),\hat w(x,t)\right)$ — решение задачи (4)–(7), то $\hat u(x,t)$ — решение задачи (1)-(3).

Для решения задачи (4)–(7) применяется метод параметризации.

По шагу $h>0: Nh=T$ произведем разбиение $[0,T)=\bigcup_{r=1}^{N}[(r-1)h,rh), N=1,2,\ldots$. При этом область Ω разбивается на N частей. Через $v_r(x,t), w_r(x,t), u_r(x,t)$ обозначим соответственно сужение функции $v(x,t), w(x,t), u(x,t)$ на $\Omega_r=[0,\omega]\times[(r-1)h,rh), r=$. Тогда задача (4)–(7) будет эквивалентна краевой задаче

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}=A(x,t)v_r+B(x,t)w_r(x,t)+C(x,t)u_r(x,t)+f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega_r, \qquad (8)$$

$$v_1(x,0)-\lim_{t\to T-0}v_N(x,t)=0, \ x\in[0,\omega], \qquad (9)$$

$$\lim_{t\to sh-0}v_s(x,t)=v_{s+1}(x,sh), \quad s=\overline{1,N-1}, \qquad (10)$$

$$w_r(x,t)=\dot\psi(t)+\int_0^x\frac{\partial v_r(\xi,t)}{\partial t}d\xi, \ (x,t)\in\Omega_r, \ r=\overline{1,N}, \qquad (11)$$

$$u_r(x,t)=\psi(t)+\int_0^x v_r(\xi,t)d\xi, \ (x,t)\in\Omega_r, \ r=\overline{1,N}, \qquad (12)$$

где (10) — условие склеивания функций $v(x,t)$ во внутренних линиях разбиения. Через $\lambda_r(x)$ обозначим значение функции $v_r(x,t)$ при $t=(r-1)h$, т.е. $\lambda_r(x)=v_r(x,(r-1)h)$ и сделаем замену $\widetilde v_r(x,t)=v_r(x,t)-\lambda_r(x), \quad r=\overline{1,N}$. Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестными функциями $\lambda_r(x)$:

$$\frac{\partial\widetilde v_r}{\partial t}=A(x,t)\widetilde v_r+A(x,t)\lambda_r(x)+B(x,t)w_r(x,t)+C(x,t)u_r(x,t)+f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega_r, \qquad (13)$$

$$\widetilde v_r(x,(r-1)h)=0, \ x\in[0,\omega], \ r=\overline{1,N}, \qquad (14)$$

$$\lambda_1(x)-\lambda_N(x)-\lim_{t\to T-0}\widetilde v_N(x,t)=0, \ x\in[0,\omega], \qquad (15)$$

$$\lambda_s(x)+\lim_{t\to sh-0}\widetilde v_s(x,t)-\lambda_{s+1}(x)=0, \ x\in[0,\omega], \ s=\overline{1,N-1}, \qquad (16)$$

$$w_r(x,t)=\dot\psi(t)+\int_0^x\frac{\partial\widetilde v_r(\xi,t)}{\partial t}d\xi, \ (x,t)\in\Omega_r, \ r=\overline{1,N}, \qquad (17)$$

$$u_r(x,t)=\psi(t)+\int_0^x\widetilde v_r(\xi,t)d\xi+\int_0^x\lambda_r(\xi)d\xi, \ (x,t)\in\Omega_r, \ r=\overline{1,N}. \qquad (18)$$

Задачи (8)–(12) и (13)–(18) эквивалентны в том смысле, что если система троек $\{v_r(x,t),u_r(x,t),w_r(x,t)\}, \quad r=\overline{1,N}$ является решением задачи (8)–(12), то система четверок $\{\lambda_r(x)=v_r(x,(r-1)h), \widetilde v_r(x,t)=v_r(x,t)-v_r(x,(r-1)h), u_r(x,t), w_r(x,t)\}, \quad r=\overline{1,N}$ будет решением задачи (13)–(18) и наоборот, если $\{\lambda_r(x),\widetilde v_r(x,t),u_r(x,t),w_r(x,t)\}, \quad r=\overline{1,N}$ — решение задачи (13)–(18), то система $\{\lambda_r(x)+\widetilde v_r(x,t),u_r(x,t),w_r(x,t)\}, \quad r=\overline{1,N}$ будет решением задачи (8)–(12).

Репозиторий КарГУ

Задача (13), (14), при фиксированных $\lambda_r(x), u_r(x,t), w_r(x,t)$, является однопараметрическим семейством задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, где $x \in [0,\omega]$ и эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$\tilde{v}_r(x,t) = \int_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)\tilde{v}_r(x,\tau)d\tau + \int_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)d\tau \cdot \lambda_r(x) + \int_{(r-1)h}^{t} [B(x,\tau)w_r(x,\tau) + C(x,\tau)u_r(x,\tau) + f(x,\tau)]d\tau. \quad (19)$$

Вместо $\tilde{v}_r(x,t)$ подставим соответствующую правую часть (19) и, повторив этот процесс $\nu(\nu = 1,2,...)$ раз, получим:

$$\tilde{v}_r(x,t) = D_{\nu r}(x,t)\lambda_r(x) + F_{\nu r}(x,t,w_r,u_r) + G_{\nu r}(x,t,\tilde{v}_r), \quad r = \overline{1,N}, \quad (20)$$

где $D_{\nu r}(x,t) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \int_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1)d\tau_1 + \ldots + \int_{(r-1)h}^{\tau_j} A(x,\tau_{j+1})d\tau_{j+1} \ldots d\tau_1$,

$$F_{\nu r}(x,t,w_r,u_r) = \int_{(r-1)h}^{t} [B(x,\tau_1)w_r(x,\tau_1) + C(x,\tau_1)u_r(x,\tau_1) + f(x,\tau_1)]d\tau_1 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\nu-1} \int_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1) \ldots \int_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}} A(x,\tau_j) \int_{(r-1)h}^{\tau_j} [B(x,\tau_{j+1})w_r(x,\tau_{j+1}) + C(x,\tau_{j+1})u_r(x,\tau_{j+1}) + f(x,\tau_{j+1})]d\tau_{j+1}d\tau_j \ldots d\tau_1,$$

$$G_{\nu r}(x,t,\tilde{v}_r) = \int_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1) \ldots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(x,\tau_{\nu-1}) \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x,\tau_\nu)\tilde{v}_r(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \ldots d\tau_1, \tau_0 = t, r = \overline{1,N}.$$

Переходя к пределу при $t \to rh - 0$, в (20), находим $\lim_{t \to rh-0} = \tilde{v}_r(x,t)$, $r = \overline{1,N}$, $x \in [0,\omega]$, подставляя их в (15), (16), для неизвестных функций $\lambda_r(x), r = \overline{1,N}$ получим систему функциональных уравнений:

$$Q_\nu(x,h)\lambda(x) = -F_\nu(x,h,w,u) - G_\nu(x,h,\tilde{v}), \quad (21)$$

где $$Q_\nu(h,x) = \begin{bmatrix} I & 0 & \ldots & 0 & -[I + D_{\nu N}(x,Nh)] \\ I + D_{\nu 1}(x,h) & -I & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I + D_{\nu 2}(x,2h) & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & I + D_{\nu,N-1}(x,(N-1)h) & -I \end{bmatrix},$$

$$F_\nu(x,h,w,u) = (-F_{\nu N}(x,Nh,w_N,u_N), F_{\nu 1}(x,h,w_1,u_1), \ldots, F_{\nu,N-1}(x,(N-1)h,w_{N-1},u_{N-1})),$$

$$G_\nu(x,h,\tilde{v}) = (-G_{\nu N}(x,Nh,\tilde{v}_N), G_{\nu 1}(x,h,\tilde{v}_1), \ldots, G_{\nu,N-1}(x,(N-1)h,\tilde{v}_{N-1})),$$

где I — единичная матрица размерности *n*. Для нахождения системы из четырех функций $\{\lambda_r(x), \tilde{v}_r(x,t), w_r(x,t), u_r(x,t)\}, r = \overline{1,N}$ имеем замкнутую систему, состоящую из уравнений (21), (20), (18) и (17).

Предполагая обратимость матрицы $Q_\nu(x,h)$, при всех $x \in [0,\omega]$, из уравнения (18), где $\tilde{v}_r(x,t) = 0$, $w_r(x,t) = \dot{\psi}(t)$, $u_r(x,t) = \psi(t)$, находим: $\lambda^{(0)}(x) = (\lambda_1^{(0)}(x), \lambda_2^{(0)}(x), \ldots, \lambda_N^{(0)}(x))'$:

$$\lambda^{(0)}(x) = -[Q_\nu(x,h)]^{-1}\{F_\nu(x,h,\dot{\psi},\psi) + G_\nu(x,h,0)\}.$$

Используя уравнение (20), при $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$ найдем функции $\{\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\}, r = \overline{1,N}$, т.е. $\tilde{v}_r^{(0)}(x,t) = D_{\nu r}(x,t)\lambda_r^{(0)}(x) + F_{\nu r}(x,t,\dot{\psi},\psi) + G_{\nu r}(x,t,0)$. Функции $u_r^{(0)}(x,t), w_r^{(0)}(x,t), r = \overline{1,N}$ определяются из соотношений $u_r^{(0)}(x,t) = \psi(t) + \int_0^x \tilde{v}_r^{(0)}(\xi,t)d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi)d\xi$, $\quad w_r^{(0)}(x,t) = \psi(t) + \int_0^x \frac{\partial \tilde{v}_r^{(0)}(\xi,t)}{\partial t}d\xi$, $(x,t) \in \Omega_r$.

За начальное приближение задачи (13)–(18) возьмем систему $(\lambda_r^{(0)}(x), \tilde{v}_r^{(0)}(x,t), w_r^{(0)}(x,t), u_r^{(0)}(x,t))$, $r = \overline{1,N}$, и последовательные приближения строим по следующему алгоритму:

Репозиторий КарГУ

Шаг 1. А) Предполагая, что $u_r(x,t)=u_r^{(0)}(x,t), \quad w_r(x,t)=w_r^{(0)}(x,t), \ r=\overline{1,N}$, первые приближения по $\lambda_r(x), \tilde{v}_r(x,t)$ находим, решая задачу (13)–(16). Взяв $\lambda^{(1,0)}(x)=\lambda^{(0)}(x), \quad \tilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)=\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)$, систему пар $\{\lambda_r^{(1)}(x), \tilde{v}_r^{(1)}(x,t)\}, \quad r=\overline{1,N}$, найдем как предел последовательности $\lambda_r^{(1,m)}(x), \tilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)$, определяемый следующим способом:

Шаг 1.1. Предполагая обратимость матрицы $Q_v(x,h)$, при всех $x\in[0,\omega]$, из уравнения (21), где $\tilde{v}_r(x,t)=\tilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)$, находим $\lambda^{(1,1)}(x)=\left(\lambda_1^{(1,1)}(x), \lambda_2^{(1,1)}(x), ..., \lambda_N^{(1,1)}(x)\right)'$:

$$\lambda^{(1,1)}(x)=-[Q_v(x,h)]^{-1}\left\{F_v\left(x,h,w^{(0)},u^{(0)}\right)+G_v\left(x,h,\tilde{v}^{(1,0)}\right)\right\}.$$

Подставив найденные $\lambda_r^{(1,1)}(x), r=\overline{1,N}$ в (20), находим:

$$\tilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)=D_{vr}(x,t)\lambda_r^{(1,1)}(x)+F_{vr}\left(x,t,w^{(0)},u^{(0)}\right)+G_{vr}\left(x,t,\tilde{v}^{(1,0)}\right).$$

Шаг 1.2. Из уравнения (21), где $\tilde{v}_r(x,t)=\tilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)$, определяем

$$\lambda^{(1,2)}(x)=-[Q_v(x,h)]^{-1}\left\{F_v\left(x,h,w^{(0)},u^{(0)}\right)+G_v\left(x,h,\tilde{v}^{(1,1)}\right)\right\}.$$

Вновь используя выражение (20), найдем функции $\{\tilde{v}_r^{(1,2)}(x,t)\}, \ r=\overline{1,N}$:

$$\tilde{v}_r^{(1,2)}(x,t)=D_{vr}(x,t)\lambda_r^{(1,2)}(x)+F_{vr}\left(x,t,w^{(0)},u^{(0)}\right)+G_{vr}\left(x,t,\tilde{v}^{(1,1)}\right).$$

На $(1,m)$-м шаге получаем систему пар $\{\lambda_r^{(1,m)}(x), \tilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)\}, \ r=\overline{1,N}$. Предположим, что решение задачи (13)–(16), последовательность систем пар $\{\lambda_r^{(1,m)}(x), \tilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)\}$ определена при $m\to\infty$, сходится к непрерывным, соответственно, на $x\in[0,\omega], (x,t)\in\Omega_r$ функциям $\lambda_r^{(1)}(x), \tilde{v}_r^{(1)}(x,t), \ r=\overline{1,N}$.

В) Функции $w_r^{(1)}(x,t), u_r^{(1)}(x,t), r=\overline{1,N}$ определяются из соотношений:

$$w_r^{(1)}(x,t)=\dot{\psi}(t)+\int_0^x \frac{\partial\tilde{v}_r^{(1)}(\xi,t)}{\partial t}d\xi, \quad u_r^{(1)}(x,t)=\psi(t)+\int_0^x \tilde{v}_r^{(1)}(\xi,t)d\xi+\int_0^x \lambda_r^{(1)}(\xi)d\xi, \ (x,t)\in\Omega_r.$$

Шаг 2. А) Предполагая, что $w_r(x,t)=w_r^{(1)}(x,t), u_r(x,t)=u_r^{(1)}(x,t), \ r=\overline{1,N}$, вторые приближения по $\lambda_r(x), \tilde{v}_r(x,t)$ находим, решая задачу (13)–(16). Взяв $\lambda^{(2,0)}(x)=\lambda_r^{(1)}(x), \tilde{v}_r^{(2,0)}(x,t)=\tilde{v}_r^{(1)}(x,t)$ систему пар $\{\lambda_r^{(2)}(x), \tilde{v}_r^{(2)}(x,t)\}, \ r=\overline{1,N}$, найдем как предел последовательности $\lambda_r^{(2,m)}(x), \tilde{v}_r^{(2,m)}(x,t)$, определяемый следующим способом:

Шаг 2.1. Предполагая обратимость матрицы $Q_v(x,h)$, при всех $x\in[0,\omega]$, из уравнения (21), где $\tilde{v}_r(x,t)=\tilde{v}_r^{(2,0)}(x,t)$, находим $\lambda^{(2,1)}(x)=\left(\lambda_1^{(2,1)}(x), \lambda_2^{(2,1)}(x), ..., \lambda_N^{(2,1)}(x)\right)'$:

$$\lambda^{(2,1)}(x)=-[Q_v(x,h)]^{-1}\left\{F_v\left(x,h,w^{(1)},u^{(1)}\right)+G_v\left(x,h,\tilde{v}^{(2,0)}\right)\right\}.$$

Подставив найденные $\lambda_r^{(2,1)}(x), \ r=\overline{1,N}$, в (20) находим:

$$\tilde{v}_r^{(2,1)}(x,t)=D_{vr}(x,t)\lambda_r^{(2,1)}(x)+F_{vr}\left(x,t,w^{(1)},u^{(1)}\right)+G_{vr}\left(x,t,\tilde{v}^{(2,0)}\right).$$

Шаг 2.2. Из уравнения (21), где $\tilde{v}_r(x,t)=\tilde{v}_r^{(2,1)}(x,t)$ определяем

$$\lambda^{(2,2)}(x)=-[Q_v(x,h)]^{-1}\left\{F_v\left(x,h,w^{(1)},u^{(1)}\right)+G_v\left(x,h,\tilde{v}^{(2,1)}\right)\right\}.$$

Вновь используя выражение (20), найдем функции $\{\tilde{v}_r^{(2,2)}(x,t)\}, \ r=\overline{1,N}$:

$$\tilde{v}_r^{(2,2)}(x,t)=D_{vr}(x,t)\lambda_r^{(2,2)}(x)+F_{vr}\left(x,t,w^{(1)},u^{(1)}\right)+G_{vr}\left(x,t,\tilde{v}^{(2,1)}\right).$$

На $(2,m)$-м шаге получаем систему пар $\{\lambda_r^{(2,m)}(x), \tilde{v}_r^{(2,m)}(x,t)\}, \ r=\overline{1,N}$. Предположим, что решение задачи (13)–(16), последовательность систем пар $\{\lambda_r^{(1,m)}(x), \tilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)\}$ определена при $m\to\infty$, сходится к непрерывным, соответственно, на $x\in[0,\omega], (x,t)\in\Omega_r$ функциям $\lambda_r^{(2)}(x), \tilde{v}_r^{(2)}(x,t), \ r=\overline{1,N}$.

В) Функции $w_r^{(2)}(x,t), u_r^{(2)}(x,t), r=\overline{1,N}$ определяются из соотношений:

$$w_r^{(2)}(x,t)=\dot{\psi}(t)+\int_0^x \frac{\partial\tilde{v}_r^{(2)}(\xi,t)}{\partial t}d\xi, \quad u_r^{(2)}(x,t)=\psi(t)+\int_0^x \tilde{v}_r^{(2)}(\xi,t)d\xi+\int_0^x \lambda_r^{(2)}(\xi)d\xi, \ (x,t)\in\Omega_r.$$

Условия следующего утверждения обеспечивают осуществимость и сходимость предложенного алгоритма, а также однозначную разрешимость задачи (13)–(18).

Репозиторий КарГУ

Теорема 1. Пусть при некоторых $h>0: Nh=T,\ N=1,2,...$ и $\nu,\ \nu=1,2,...,$ $(nN\times nN)$ — матрица $Q_\nu(h,x)$ обратима при всех $x\in[0,\omega]$ и выполняются неравенства:

1) $\left\|[Q_\nu(h,x)]^{-1}\right\|\le\gamma_\nu(h,x);$

2) $q_\nu(h,x)=\dfrac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\left[1+\gamma_\nu(x,h)\displaystyle\sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right]\le\mu<1.$

Тогда существует единственное решение задачи (13)–(18) и справедливы оценки

а) $$\max\left\{\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^*(x)-\lambda_r^{(k)}(x)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^*(x,t)-v_r^{(k)}(x,t)\right\|,\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\frac{\partial\widetilde{v}_r^*(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)}{\partial t}\right\|\right\}\le$$

$$\le a_0(x)\sum_{j=k-1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\int_0^x a_0(\xi)d\xi\right)^j\int_0^x\max\{a_1(\xi),a_2(\xi)\}d\xi\,\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\dot\psi(t)\|,\|f\|_0\right\}.$$

б) $$\max\left\{\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^*(x,t)-u_r^{(k)}(x,t)\right\|,\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|w_r^*(x,t)-w_r^{(k)}(x,t)\right\|\right\}\le$$

$$\le\int_0^x\max\left\{\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^*(\xi)-\lambda_r^{(k)}\xi\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^*(\xi,t)-v_r^{(k)}(\xi,t)\right\|,\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\frac{\partial\widetilde{v}_r^*(\xi,t)}{\partial t}-\frac{\partial\widetilde{v}_r^{(k)}(\xi,t)}{\partial t}\right\|\right\}d\xi,$$

$$k=1,2,...,\quad \alpha(x)=\max_{t\in[0,T]}\|A(x,t)\|,\beta(x)=\max_{t\in[0,T]}\|B(x,t)\|,\sigma(x)=\max_{t\in[0,T]}\|C(x,t)\|,$$

$$a_0(x)=\max\left\{\frac{[b_1(x)+b_3(x)][\beta(x)+\sigma(x)]}{1-q_\nu(x,h)},\int_0^x[\alpha(\xi)b_3(\xi)+1][\beta(\xi)+\sigma(\xi)d\xi]\right\},$$

$$a_1(x)=\frac{\gamma_\nu(x,h)}{1-q_\nu(x,h)}\left[1+\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\right]\Big([b_1(x)+b_3(x)][\beta(x)+\sigma(x)]\times$$

$$\times\int_0^x\max\{\alpha(\xi)b_3(\xi)+1,b_1(\xi)+b_3(\xi)\}b_2(\xi)d\xi+b_3(x)b_2(x)\left[q_\nu(x,h)+\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\right]\Big),$$

$$a_2(x)=\int_0^x[\alpha(\xi)b_3(\xi)+1][\beta(\xi)+\sigma(\xi)]\int_0^\xi\max\{\alpha(\xi_1)b_3(\xi_1)+1,b_1(\xi_1)+b_3(\xi_1)\}b_2(\xi_1)d\xi_1d\xi,$$

$$b_1(x)=\gamma_\nu(x,h)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!},\quad b_2(x)=\beta(x)+\sigma(x)+1,\quad b_3(x)=\left[1+\gamma_\nu(x,h)h\sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right]h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}.$$

Доказательство. При предположениях относительно данных задачи имеют место неравенства

$$\|F_\nu(x,h,w,u)\|\le h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left[\beta(x)\|w_r(x,t)\|+\sigma(x)\|u_r(x,t)\|+\|f(x,t)\|\right],$$

$$\|G_\nu(x,h,\widetilde{v})\|\le\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r(x,t)\|,\quad\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|D_{\nu r}(x,t)\|\le\sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}.$$

Из нулевого шага алгоритма вытекают следующие оценки:

$$\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(0)}(x)\right\|\le\gamma_\nu(x,h)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\sup_{t\in[0,T]}\left[\beta(x)\|\dot\psi(x)\|+\sigma(x)\|\psi(x)\|+\|f(x,t)\|\right]\le$$

$$\le b_1(x)b_2(x)\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\dot\psi(t)\|,\|f\|_0\right\},$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\|\le h\sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(0)}(x)\right\|+\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}b_2(x)\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\dot\psi(t)\|,\|f\|_0\right\}\le$$

$$\le b_3(x)b_2(x)\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\dot\psi(t)\|,\|f\|_0\right\},$$

Репозиторий КарГУ

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| w_r^{(0)}(x,t)-\dot{\psi}(t) \right\| \le \int_0^x [\alpha(\xi)b_3(\xi)+1]b_2(\xi)d\xi \max\left\{ \max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|, \max_{t\in[0,T]}\|\dot{\psi}(t)\|, \|f\|_0 \right\},$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| u_r^{(0)}(x,t)-\psi(t) \right\| \le \int_0^x [b_1(\xi)+b_3(\xi)]b_2(\xi)d\xi \max\left\{ \max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|, \max_{t\in[0,T]}\|\dot{\psi}(t)\|, \|f\|_0 \right\}.$$

Справедливы следующие оценки:

$$\max_{r=\overline{1,N}} \left\| \lambda_r^{(1,1)}(x)-\lambda_r^{(1,0)}(x) \right\| \le \gamma_\nu(x,h)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\beta(x)\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| w_r^{(0)}(x,t)-\dot{\psi}(t) \right\| +$$

$$+\gamma_\nu(x,h)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\sigma(x)\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| u_r^{(0)}(x,t)-\psi(t) \right\| + \gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \widetilde{v}_r^{(0)}(x,t) \right\|,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(1,0)}(x,t) \right\| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}} \left\| \lambda_r^{(1,1)}(x)-\lambda_r^{(1,0)}(x) \right\| + h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\beta(x)\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| w_r^{(0)}(x,t)-\dot{\psi}(t) \right\| +$$

$$+h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\sigma(x)\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| u_r^{(0)}(x,t)-\psi(t) \right\| + \frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \widetilde{v}_r^{(0)}(x,t) \right\| \le$$

$$\le b_3(x)\beta(x)\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| w_r^{(0)}(x,t)-\dot{\psi}(t) \right\| +$$

$$+b_3(x)\sigma(x)\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| u_r^{(0)}(x,t)-\psi(t) \right\| + q_\nu(x,h)\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \widetilde{v}_r^{(0)}(x,t) \right\|.$$

Установим неравенство

$$\Delta^{(1,1)}(x)=\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(1,0)}(x,t) \right\| + \max_{r=\overline{1,N}} \left\| \lambda_r^{(1,1)}(x)-\lambda_r^{(1,0)}(x) \right\| \le$$

$$\le [b_1(x)+b_3(x)][\beta(x)+\sigma(x)]\int_0^x \max\{\alpha(\xi)b_3(\xi)+1, b_1(\xi)+b_3(\xi)\}b_2(\xi)d\xi \max\left\{ \max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|, \max_{t\in[0,T]}\|\dot{\psi}(t)\|, \|f\|_0 \right\} +$$

$$+\left[q_\nu(x,h)+\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!} \right] b_3(x)b_2(x)\max\left\{ \max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|, \max_{t\in[0,T]}\|\dot{\psi}(t)\|, \|f\|_0 \right\}.$$

Таким образом,

$$\max_{r=\overline{1,N}} \left\| \lambda_r^{(1,m+1)}(x)-\lambda_r^{(1,m)}(x) \right\| \le \gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \widetilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(1,m-1)}(x,t) \right\|, \qquad (22)$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \widetilde{v}_r^{(1,m+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(1,m)}(x,t) \right\| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}} \left\| \lambda_r^{(1,m+1)}(x)-\lambda_r^{(1,m)}(x) \right\| + \frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \widetilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(1,m-1)}(x,t) \right\| \le$$

$$\le q_\nu(x,h)\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \widetilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(1,m-1)}(x,t) \right\|. \qquad (23)$$

В силу неравенства $q_\nu(x,h)<1$ следует равномерная сходимость $v_r^{(1,m+1)}(x,t), (x,t)\in\Omega_r$ к $v_r^{(1)}(x,t)$ и сходимость последовательности систем функций $\lambda_r^{(1,m+1)}(x)$ к непрерывным на $(x)\in[0,\omega]$ функциям $\lambda_r^{(1)}(x)$ при всех $r=\overline{1,N}$:

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \widetilde{v}_r^{(1,m+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(1,m)}(x,t) \right\| \le \sum_{j=0}^{m}[q_\nu(x,h)]^j \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| \widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(1,0)}(x,t) \right\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \left\| \lambda_r^{(1,m+1)}(x)-\lambda_r^{(1,0)}(x) \right\| \le$$

Репозиторий КарГУ

$$\le \sum_{j=0}^{m}\left[q_\nu(x,h)\right]^j \gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(1,1)}(x)-\lambda_r^{(1,0)}(x)\right\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(1,m+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(1,m+1)}(x)-\lambda_r^{(1,0)}(x)\right\|\le$$

$$\le \sum_{j=0}^{m}\left[q_\nu(x,h)\right]^j\left\{1+\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\right\}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(1,1)}(x)-\lambda_r^{(1,0)}(x)\right\|.$$

Переходя к пределу при $m\to\infty$, получим оценки:

$$\Delta^{(1)}(x)=\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(1)}(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\right\|\le$$

$$\le\frac{1}{1-q_\nu(x,h)}\left\{1+\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\right\}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)\right\|+$$

$$+\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(1,1)}(x)-\lambda_r^{(1,0)}(x)\right\|\le a_1(x)\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\dot{\psi}(t)\|,\|f\|_0\right\}.$$

$$\widetilde{\Delta}^{(1)}(x)=\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\frac{\partial\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)}{\partial t}\right\|\le$$

$$\le\int_0^x\left[\alpha(\xi)b_3(\xi)+1\right]\left[\beta(\xi)+\sigma(\xi)\right]\int_0^\xi\max\{\alpha(\xi_1)b_3(\xi_1)+1,b_1(\xi_1)+b_3(\xi_1)\}b_2(\xi_1)d\xi_1 d\xi\times$$

$$\times\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\dot{\psi}(t)\|,\|f\|_0\right\}=a_2(x)\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\dot{\psi}(t)\|,\|f\|_0\right\},$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|w_r^{(1)}(x,t)-w_r^{(0)}(x,t)\right\|\le\int_0^x\widetilde{\Delta}^{(1)}(\xi)d\xi,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(1)}(x,t)-u_r^{(0)}(x,t)\right\|\le\int_0^x\Delta^{(1)}(\xi)d\xi.$$

$$\max\left\{\Delta^{(1)}(x),\widetilde{\Delta}^{(1)}(x)\right\}\le\max\{a_1(x),a_2(x)\}\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\dot{\psi}(t)\|,\|f\|_0\right\}.$$

Для систем разностей $\lambda_r^{(k+1)}(x)-\lambda_r^{(k)}(x)$, $\widetilde{v}_r^{(k+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)$, $w_r^{(k+1)}(x,t)-w_r^{(k)}(x,t)$, $u_r^{(k+1)}(x,t)-u_r^{(k)}(x,t)$, $r=\overline{1,N}$, $k=1,2,...$ справедливы оценки:

$$\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(k+1,1)}(x)-\lambda_r^{(k+1,0)}(x)\right\|\le$$

$$\le\beta(x)b_1(x)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|w_r^{(k)}(x,t)-w_r^{(k-1)}(x,t)\right\|+\sigma(x)b_1(x)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(k)}(x,t)-u_r^{(k-1)}(x,t)\right\|,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(k+1,1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k+1,0)}(x,t)\right\|\le$$

$$\le b_3(x)\beta(x)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|w_r^{(k)}(x,t)-w_r^{(k-1)}(x,t)\right\|+b_3(x)\sigma(x)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(k)}(x,t)-u_r^{(k-1)}(x,t)\right\|,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(k+1,m+1)}(x)-\lambda_r^{(k+1,m)}(x)\right\|\le\gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(k+1,m)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k+1,m-1)}(x,t)\right\|,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(k+1,m+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k+1,m)}(x,t)\right\|\le\gamma_\nu(x,h)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(k+1,m)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k+1,m-1)}(x,t)\right\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(k+1,m+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k+1,0)}(x,t)\right\|\le\sum_{j=0}^{m}\left[q_\nu(x,h)\right]^j\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(k+1,1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k+1,0)}(x,t)\right\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\lambda_r^{(k+1,m+1)}(x,t)-\lambda_r^{(k+1,0)}(x,t)\right\|\le$$

Репозиторий КарГУ

$$\le \sum_{j=0}^{m-1}\left[q_\nu(x,h)\right]^j \gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(k+1,1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k+1,0)}(x,t)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(k+1,1)}(x)-\lambda_r^{(k+1,0)}(x)\right\|.$$

Переходя к пределу при $m\to\infty$, получим оценки:

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(k+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\right\|\le$$

$$\le\frac{b_3(x)\beta(x)}{1-q_\nu(x,h)}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|w_r^{(k)}(x,t)-w_r^{(k-1)}(x,t)\right\|+\frac{b_3(x)\sigma(x)}{1-q_\nu(x,h)}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(k)}(x,t)-u_r^{(k-1)}(x,t)\right\|, \quad (24)$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(k+1)}(x)-\lambda_r^{(k)}(x)\right\|\le$$

$$\le\frac{b_1(x)\beta(x)}{1-q_\nu(x,h)}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|w_r^{(k)}(x,t)-w_r^{(k-1)}(x,t)\right\|+\frac{b_1(x)\sigma(x)}{1-q_\nu(x,h)}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(k)}(x,t)-u_r^{(k-1)}(x,t)\right\|, \quad (25)$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|w_r^{(k+1)}(x,t)-w_r^{(k)}(x,t)\right\|\le\int_0^x\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\frac{\partial\widetilde{v}_r^{(k+1)}(\xi,t)}{\partial t}-\frac{\partial\widetilde{v}_r^{(k)}(\xi,t)}{\partial t}\right\|d\xi,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(k+1)}(x,t)-u_r^{(k)}(x,t)\right\|\le\int_0^x\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(k+1)}(\xi)-\lambda_r^{(k)}(\xi)\right\|d\xi+\int_0^x\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(k+1)}(\xi,t)-\widetilde{v}_r^{(k)}(\xi,t)\right\|d\xi.$$

Суммируя соответственно левые и правые части неравенств (24), (25) имеем:

$$\begin{aligned}\Delta^{(k+1)}(x)&=\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(k+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(k+1)}(x)-\lambda_r^{(k)}(x)\right\|\le\\&\le\frac{[b_1(x)+b_3(x)]\beta(x)}{1-q_\nu(x,h)}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|w_r^{(k)}(x,t)-w_r^{(k-1)}(x,t)\right\|+\\&+\frac{[b_1(x)+b_3(x)]\sigma(x)}{1-q_\nu(x,h)}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(k)}(x,t)-u_r^{(k-1)}(x,t)\right\|,\end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}^{(k+1)}(x)&=\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\frac{\partial\widetilde{v}_r^{(k+1)}(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)}{\partial t}\right\|\le\\&\le\int_0^x\left[\alpha(\xi)b_3(\xi)+1\right]\Big[\beta(\xi)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|w_r^{(k)}(x,t)-w_r^{(k-1)}(x,t)\right\|+\\&+\sigma(\xi)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(k)}(x,t)-u_r^{(k-1)}(x,t)\right\|\Big]d\xi,\end{aligned} \quad (27)$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|w_r^{(k+1)}(x,t)-w_r^{(k)}(x,t)\right\|\le\int_0^x\widetilde{\Delta}^{(k+1)}(\xi)d\xi,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(k+1)}(x,t)-u_r^{(k)}(x,t)\right\|\le\int_0^x\Delta^{(k+1)}(\xi)d\xi.$$

Для функции $\max\left\{\Delta^{(k+1)}(x),\widetilde{\Delta}^{(k+1)}(x)\right\}$ на основе (26), (27) установим неравенство

$$\max\left\{\Delta^{(k+1)}(x),\widetilde{\Delta}^{(k+1)}(x)\right\}\le a_0(x)\int_0^x\max\left\{\Delta^{(k)}(\xi),\widetilde{\Delta}^{(k)}(\xi)\right\}d\xi. \quad (28)$$

$$\max\left\{\Delta^{(k+1)}(x),\widetilde{\Delta}^{(k+1)}(x)\right\}\le\frac{a_0(x)}{(k-1)!}\left(\int_0^x a_0(\xi)d\xi\right)^{k-1}\int_0^x\max\left\{\Delta^{(1)}(\xi),\widetilde{\Delta}^{(1)}(\xi)\right\}d\xi.$$

Установим неравенства

$$\max\left\{\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(k+p)}(x)-\lambda_r^{(k)}(x)\right\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(k+p)}(x,t)-v_r^{(k)}(x,t)\right\|,\right.$$

$$\left.\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\frac{\partial\widetilde{v}_r^{(k+p)}(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)}{\partial t}\right\|\right\}\le$$

Репозиторий КарГУ

$$\le \max\left\{\Delta^{(k+p)}(x),\widetilde{\Delta}^{(k+p)}(x)\right\}+\max\left\{\Delta^{(k+p-1)}(x),\widetilde{\Delta}^{(k+p-1)}(x)\right\}+\ldots+\max\left\{\Delta^{(1)}(x),\widetilde{\Delta}^{(1)}(x)\right\}\le$$

$$\le a_0(x)\sum_{j=k-1}^{k+p-2}\frac{1}{j!}\left(\int_0^x a_0(\xi)d\xi\right)^j\int_0^x\max\left\{\Delta^{(1)}(\xi),\widetilde{\Delta}^{(1)}(\xi)\right\}d\xi\le$$

$$\le a_0(x)\sum_{j=k-1}^{k+p-2}\frac{1}{j!}\left(\int_0^x a_0(\xi)d\xi\right)^j\int_0^x\max\{a_1(\xi),a_2(\xi)\}d\xi\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\|f\|_0\right\},$$

$$\max\left\{\max_{r=1,N}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^{(k+p)}(x,t)-u_r^{(k)}(x,t)\right\|,\max_{r=1,N}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|w_r^{(k+p)}(x,t)-w_r^{(k)}(x,t)\right\|\right\}\le$$

$$\le\int_0^x\max\left\{\max_{r=1,N}\left\|\lambda_r^{(k+p)}(x)-\lambda_r^{(k)}(x)\right\|+\max_{r=1,N}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^{(k+p)}(x,t)-v_r^{(k)}(x,t)\right\|,\right.$$

$$\left.\max_{r=1,N}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\frac{\partial\widetilde{v}_r^{(k+p)}(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)}{\partial t}\right\|\right\},$$

переходя к пределу при $p\to\infty$, при всех $(x,t)\in\Omega_r, r=\overline{1,N}$, получим оценки теоремы 1.

Докажем единственность. Пусть существует $\left(\lambda_r^{**}(x),\widetilde{v}_r^{**}(x,t),w_r^{**}(x,t),u_r^{**}(x,t)\right), r=\overline{1,N}$, другое решение краевой задачи (13)–(18). Аналогично соотношению (28) для разностей $\lambda_r^*(x)-\lambda_r^{**}(x)$, $\widetilde{v}_r^*(x,t)-\widetilde{v}_r^{**}(x,t)$, $\left\|\frac{\partial\widetilde{v}_r^*(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\widetilde{v}_r^{**}(x,t)}{\partial t}\right\|$ при всех $(x,t)\in\Omega_r, r=\overline{1,N}$, получим:

$$\max\left\{\max_{r=1,N}\left\|\lambda_r^*(x)-\lambda_r^{**}(x)\right\|+\max_{r=1,N}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^*(x,t)-v_r^{**}(x,t)\right\|,\max_{r=1,N}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\frac{\partial\widetilde{v}_r^*(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\widetilde{v}_r^{**}(x,t)}{\partial t}\right\|\right\}\le$$

$$\le a_0(x)\int_0^x\max\left\{\max_{r=1,N}\left\|\lambda_r^*(\xi)-\lambda_r^{**}(\xi)\right\|+\max_{r=1,N}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^*(\xi,t)-v_r^{**}(\xi,t)\right\|,\max_{r=1,N}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\frac{\partial\widetilde{v}_r^*(\xi,t)}{\partial t}-\frac{\partial\widetilde{v}_r^{**}(\xi,t)}{\partial t}\right\|\right\}d\xi.$$

С помощью неравенства Беллмана-Гронуолла [7] имеем

$$\max\left\{\max_{r=1,N}\left\|\lambda_r^*(x)-\lambda_r^{**}(x)\right\|+\max_{r=1,N}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^*(x,t)-v_r^{**}(x,t)\right\|,\max_{r=1,N}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\frac{\partial\widetilde{v}_r^*(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\widetilde{v}_r^{**}(x,t)}{\partial t}\right\|\right\}=0.$$

Откуда вытекает, что $\widetilde{v}_r^*(x,t)=\widetilde{v}_r^{**}(x,t),\lambda_r^*(x)=\lambda_r^{**}(x),\left\|\frac{\partial\widetilde{v}_r^*(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial\widetilde{v}_r^{**}(x,t)}{\partial t}\right\|, r=\overline{1,N}$. Из неравенств

$$\max_{r=1,N}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|w_r^*(x,t)-w_r^{**}(x,t)\right\|\le\int_0^x\max_{r=1,N}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\frac{\partial\widetilde{v}_r^*(\xi,t)}{\partial t}-\frac{\partial\widetilde{v}_r^{**}(\xi,t)}{\partial t}\right\|d\xi,$$

$$\max_{r=1,N}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|u_r^*(x,t)-u_r^{**}(x,t)\right\|\le\int_0^x\left(\max_{r=1,N}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|\widetilde{v}_r^*(\xi,t)-\widetilde{v}_r^{**}(\xi,t)\right\|+\max_{r=1,N}\left\|\lambda_r^*(\xi)-\lambda_r^{**}(\xi)\right\|\right)d\xi$$

имеем $w_r^*(x,t)=w_r^{**}(x,t),u_r^*(x,t)=u_r^{**}(x,t), r=\overline{1,N}$, при всех $(x,t)\in\Omega_r$.

Теорема 1 доказана.

В силу эквивалентности задач (1)–(3) и (13)–(18) из теоремы 1 следует

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда задача (1)–(3) имеет единственное решение $u^*(x,t)$ и справедлива оценка

$$\max\left\{\|u\|_0,\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_0,\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_0\right\}\le$$

$$\le M_\nu(x,h)\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\dot{\psi}(t)\|,\|f\|_0\right\},\tag{29}$$

Репозиторий КарГУ

где

$$M_\nu(x,h) = a_0(x) e^{\int_0^x a_0(\xi)d\xi} \int_0^x \max\{a_1(\xi), a_2(\xi)\} d\xi + \max\{a_1(x), a_2(x)\} +$$
$$+ \max\{b_1(x) + b_3(x), \alpha(x)[b_1(x) + b_3(x)] + 1\} b_2(x).$$

Определение 1. Краевая задача (1)–(3) называется корректно разрешимой, если для любых $f(x,t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, непрерывных на $[0,T]$ функций $\psi(t)$, $\dot{\psi}(t)$, она имеет единственное решение $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$ и справедливо неравенство

$$\max\left\{\|u\|_0, \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_0, \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_0\right\} \le K \max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|, \max_{t\in[0,T]}\|\dot{\psi}(t)\|, \|f\|_0\right\}, \tag{30}$$

где K — *const*, не зависящая от $f(x,t)$, $\psi(t)$.

Из теоремы 3 [6; 2248] следует, что краевая задача (1)–(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда корректно разрешима периодическая краевая задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + F(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{31}$$

$$v(x,0) = v(x,T), \quad x \in [0,\omega]. \tag{32}$$

Функция $v(x,t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, имеющая непрерывную на $\overline{\Omega}$ производную по аргументу t, называется решением задачи (31), (32), если она удовлетворяет системе (31) и периодическому условию (32).

Определение 2. Краевая задача (1)–(3) называется корректно разрешимой, если для любых $F(x,t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$ она имеет единственное решение и справедливо неравенство

$$\|v\|_0 \le K_1 \|F\|_0, \tag{33}$$

где $K_1 - const$, не зависящая от $F(x,t)$.

Теорема 3. Краевая задача (1)–(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $h > 0 : Nh = T, N = 1,2,..,$ существует $\nu, \nu = 1,2,...,$ $(nN \times nN)$-матрица $Q_\nu(h,x)$ обратима при всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства 1),2) теоремы 1.

Теорема 4. Краевая задача (1)–(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $\nu, \nu = 1,2,...,$ существует $h = h(\nu) > 0 : Nh = T, N = 1,2,..,$ при котором $(nN \times nN)$-матрица $Q_\nu(h,x)$ обратима при всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства 1), 2) теоремы 1.

Доказательство. Достаточность условий теоремы для корректной разрешимости задачи (1)-(3) следует из теоремы 1.

Докажем необходимость. Пусть задача (1)–(3) корректно разрешима. Тогда по теореме 3 [6; 2248] задача (31), (32) будет корректно разрешимой. Обозначим через K_1 константу корректной разрешимости задачи (31), (32). По теореме 3 существует $h_0 > 0$, при котором для всех $h = h(\varepsilon,\nu) \in (0,h_0] : Nh = T$ справедлива оценка: $\left\|[Q_*(h,x)]^{-1}\right\| \le \frac{(1+\varepsilon)K_1}{h}$. Так как $\|Q_*(h,x) - Q_\nu(h,x)\| \le e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(\alpha h)^j}{j!}$, где $\alpha = \max_{x\in[0,\omega]} \alpha(x)$, то, выбирая $h_1 = h_1(\varepsilon,\nu) \in (0,h_0] : Nh_1 = T$, удовлетворяющим неравенствам

$$\frac{(1+\varepsilon)K_1}{h}\left(e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\alpha h)^j}{j!}\right) \le \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} < 1, \quad \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}\left[1 + \frac{(1+2\varepsilon)K_1}{h}\sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha h)^j}{j!}\right] < 1,$$

по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [7; 142] для любого $\nu = \mathrm{N}$ имеем $\left\|[Q_\nu(h_1,x)]^{-1}\right\| \le \frac{(1+2\varepsilon)K_1}{h_1}$, т.е. выполнены условия теоремы 1. Теорема 4 доказана.

Репозиторий КарГУ

Список литературы

1. *Cesari L.* Тр. междунар. симп. по нелинейным колебаниям. — Киев, 1963. — Т. 1. — С. 440–457.
2. *Veivoda O.* et. al. Partial differential equations: Time-periodic solutions // Alphen aan den Rijn. — Sijthoff: Noordhoff, 1981. — 358 p.
3. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — Киев, 1984.
4. *Кигурадзе Т.И.* О периодических краевых задачах для линейных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1993. — Т. 29. — № 2. — С. 281–297.
5. *Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. — Киев: Наук. думка, 1991. — 232 с.
6. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Однозначная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39. — № 10.
7. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. — М., 1980.

УДК 007:001:33(075.8)

Н.Т.Рустамов[1], А.Н.Темирбеков[2], М.А.Кантуреева[3], А.П.Асилбаева[1]

[1]Университет «Сырдарья», Жетысай;
[2]Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Яссави, Туркестан;
[3]Евразиский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана

ОЦЕНКА СЕМАНТИКИ ЗНАНИЙ

Мақалада «мәліметтер», «ақпарат» және «білім» ұғымдарын қалыптастыру арқылы білімнің өнімдік базасын құрудың негізі болған білім семантикасын бағалау алгоритмі ұсынылады. Мұнда білім семантикасы ақпаратты ақпараттық бірлік деп аталатын контексте (мәнмәтінде) суреттейді.

Forming the notions of «data» «estimitation» and «knowledge» the algorithm of estimitation of knowledge semantics that had been being the basic of creating production base of knowledge is proposed in the given work. In this case the knowledge semantics represents an information in context so-called an information unit.

Введение. Существующая база математического и программного обеспечения для систем управления создала предпосылки для широкого внедрения средств вычислительной техники на верхние уровни иерархии управления и решения сложных проблем, связанных с организационным управлением. К числу таких проблем относятся и исследования по информационным семантическим системам, т.е. системам, перерабатывающим осмысленную информацию для достижения целей. Решение указанной проблемы требует привлечения методологии диалектического материализма, взаимодействия теории познания, коммуникации, психологии, лингвистики, знаковых систем, прикладных дисциплин математики и других наук. Актуальность этой проблемы обусловлена необходимостью решения задач, связанных с созданием базы знаний (БЗ). Для информационных систем, работающих семантическими информациями, само создание базы знаний тесно связано с представлением знаний для обработки, хранения и передачи. Чтобы решить эту задачу, сперва мы должны формально описать знания или алгоритмически оценить семантику знаний.

Цель данной работы — формализовать понятия «данные», «информация» и «знание» с целью создания алгоритма оценки семантики знаний.

Метод решения задачи. Объект — первичное и неопределяемое строгое понятие. Оно всегда противопоставляется другому, двойственному ему понятию — субъект. Субъект обладает способностью воспринимать, преобразовывать и использовать информацию об объекте. Эта способность называется интеллектом [1].

Всякий объект обладает определенными свойствами, проявляющимися при взаимодействии с другими объектами. Всякое свойство объекта проявляется в рамках того или иного контекста [2]. Такое проявление фиксируется датчиками как сведение об объекте. Причем всякое сведение описывает два множества объектов. Одно, опорное множество X, для тех объектов, которые являются допусти-