4 Vukolova T.M. *Bull. Moscow un-ta, ser.* matematika, mekhanika, 1984, 6, p. 18–23.

5 Volkova Ye., Akishev G.A. *The manuscript is deposited in KazNIINTI*, 1990, 3097, 19 p.

6 Bitimkhanuly S. *Natural sciences: collection of scientific articles postgraduates*, Karaganda State University, Karaganda: Publ. KSU, 1998, p. 3–9.

7 Boas R.P. *Journal of mathematical analysis and applications*, 1967, 17, p. 463–483.

8 Akishev G.A., Bitimkhan S. *International Conference «Theoretical and applied problems of mathematics, mechanics and computer science»*, Karaganda, 2014, p. 4, 5.

УДК 517.968

А.Х.Аттаев[1], С.А.Искаков[2], Г.Ж.Каршыгина[2], М.И.Рамазанов[2]

[1]Кабардино-Балкарский научный центр РАН, Начальник, Россия;
[2]Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: isagyndyk@mail.ru)

Первая краевая задача для уравнения теплопроводности с нагрузкой дробного порядка I

В статье рассмотрена первая краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности в четверти плоскости. Нагруженное слагаемое — след производной дробного порядка на многообразии $x = t$. Решение задачи сводится к исследованию особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода с несжимаемым ядром. Решение характеристического уравнения методом регуляризации показало, что особое интегральное уравнение Вольтерра имеет непустой спектр при $1/2 \le \beta < 1$. Доказана теорема о существовании нетривиального решения однородной краевой задачи в неограниченной области.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, дробная производная, особое интегральное уравнение Вольтерра, нетривиальное решение.

В работе [1] отмечено, что за последние 35 лет появилось значительное число публикаций, проблемно-ориентированных на нагруженные уравнения, и об этом свидетельствует, например, то, что на запрос о нагруженных уравнениях на поисковом российском сервере «Яндекс» нашлось 163 тысячи ответов, на поисковом международном сервере «Yahoo» — 699 тысяч ответов. Значительную роль в развитии теории нагруженных уравнений играет и то, что они могут выступать как один из способов введения обобщенных решений широких классов уравнений в частных производных и как эффективный метод поиска приближенных решений краевых задач для дифференциальных уравнений. Там же показано, что базовые уравнения линейных математических моделей многих процессов на фрактальных структурах являются нагруженными дифференциальными уравнениями дробного порядка.

Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка — обобщения уравнений с частными производными целочисленного порядка имеют большое практическое значение, например, такие уравнения являются математическими моделями различных процессов и явлений в средах с фрактальной структурой. При описании процессов в системах, для которых необходимо учитывать нелокальные свойства по времени и пространству, необходим аппарат дробного интегро-дифференцирования [2]. При этом существенно то, что в рамках математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка удается не только более глубоко осознать известные данные, но и получить принципиально новые результаты.

В монографии [3] нагруженные дифференциальные уравнения интерпретируются как слабые или сильные возмущения дифференциальных уравнений. В [4–7] показано, что если в дифференциальном уравнении параболического типа нагруженное слагаемое — значение искомой функции или ее производных первого порядка на многообразии $x = t$, то соответствующие краевые задачи являются корректными в естественных классах функций, т.е. нагруженное слагаемое — *слабое* возмущение. Если же нагруженным слагаемым является значение производной второго порядка искомой функции на многообразии $x=t,$ то нарушается единственность решения первой краевой задачи, т.е. в этом случае нагрузку можно интерпретировать как *сильное* возмущение [3].

Целью данной работы является выяснение характера нагрузки дробного порядка $(1+\beta)$, $0<\beta<1$, в вопросах разрешимости первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

В области $Q=\{(x,t),x>0,t>0\}$, $0<\beta<1$, рассмотрим краевую задачу

$$u_t-u_{xx}+\lambda\cdot\left\{{}_0D_x^{1+\beta}u(x,t)\right\}_{x=t}=f(x,t); \tag{1}$$

$$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0. \tag{2}$$

Здесь λ — комплексный параметр;

$${}_0D_x^{1+\beta}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x\frac{u(\xi,t)}{(x-\xi)^\beta}d\xi\right)$$ — дробная производная Римана-Лиувилля порядка $(1+\beta)$,

$0<\beta<1$, $t^{-1/2}e^{-t}\cdot\left[\ {}_0D_x^{1+\beta}u(x,t)\ \right]_{x=t}\in L_1(0,\infty)$,

$$e^{-t}\cdot\left[{}_0D_x^{1+\beta}\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right]\Bigg|_{x=t}\in L_1(0,\infty), \tag{3}$$

где $G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right)\right]$ — функция Грина.

Обратим дифференциальную часть задачи (1)–(2)

$$u(x,t)=-\lambda\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x\frac{u(\xi,\tau)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\right\}\Bigg|_{\xi=t}d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

и с учетом соотношения

$$\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)d\xi=erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)$$

получим следующее представление решения задачи (1)–(2):

$$u(x,t)=-\lambda\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x\frac{u(\xi,\tau)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\right\}\Bigg|_{\xi=t}d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{3}$$

Введем обозначение

$$\mu(\tau)=\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x\frac{u(\xi,\tau)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\right\}\Bigg|_{x=t}, \tag{4}$$

тогда соотношение (3) запишется в виде:

$$u(x,t)=-\lambda\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\cdot\mu(\tau)d\tau+f_1(x,t). \tag{5}$$

Для нахождения неизвестной функции $\mu(t)$ произведем следующую процедуру: возьмём производную порядка $(1+\beta)$ по переменной x в обеих частях соотношения (5) и положим $x=t,$ тогда с учётом обозначения (4) получим:

$$\mu(t)=-\lambda\int_0^t K_{1+\beta}(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=f_2(t). \tag{6}$$

Ядро интегрального уравнения (6) имеет вид:

$$K_{1+\beta}(t,\tau)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x \frac{erf\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}}\right)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\Bigg|_{x=t}, \tag{7}$$

$$f_2(t)=\left[{}_0D_x^{1+\beta}\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\cdot f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right]\Bigg|_{x=t}.$$

Найдем явный вид ядра, для этого вычислим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x erf\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\cdot\frac{d\xi}{(x-\xi)^\beta}=\left\|\begin{matrix}x-\xi=\eta\\ \xi=x-\eta\end{matrix}\right\|=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x erf\left(\frac{x-\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\cdot\frac{d\eta}{\eta^\beta}=$$

$$=\left\|\frac{\partial}{\partial x}erf\left(\frac{x-\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x-\eta}{2\sqrt{t-\tau}}}e^{-z^2}dz\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}\right\|=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}}\int_0^x e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}\frac{d\eta}{\eta^\beta}\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\frac{1}{x^\beta}-\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\frac{2}{4(t-\tau)}\int_0^x\frac{x-\eta}{\eta^\beta}\cdot e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}d\eta=$$

$$=\left\|\begin{matrix}x-\eta=\xi\\ \eta=x-\xi\end{matrix}\right\|=\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\cdot x^\beta}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\int_0^x\xi\cdot(x-\xi)^{-\beta}\cdot e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\cdot x^\beta}-\frac{B(1-\beta,2)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\cdot x^{2-\beta}\cdot{}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3-\beta}{2},\frac{4-\beta}{2};-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Здесь ${}_2F_2(a_1,a_2;b_1,b_2;z)$ — гипергеометрическая функция, представимая в виде обобщенного гипергеометрического ряда:

$${}_2F_2(a_1,a_2;b_1,b_2;z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(a_1)_k\cdot(a_2)_k}{(b_1)_k\cdot(b_2)_k}\cdot\frac{z^k}{k!};$$

где $(a)_k=a(a+1)\ldots(a+k-1)=\dfrac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ — символ Похгаммера;

$$B(1-\beta,2)=\frac{\Gamma(1-\beta)\cdot\Gamma(2)}{\Gamma(3-\beta)}=\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(3-\beta)}.$$

Значит, окончательно имеем:

$$K_{1+\beta}(t,\tau)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1-\beta)}\cdot\frac{1}{t^\beta\sqrt{t-\tau}}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(3-\beta)}\cdot\frac{t^{2-\beta}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\cdot{}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3-\beta}{2},\frac{4-\beta}{2};-\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Замечание 1. $\lim\limits_{\beta\to1-0}K_{1+\beta}(t,\tau)=\dfrac{t}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}}=K_2(t,\tau)$ [3], так как

$${}_2F_2(a_1,a_2;a_1,a_2,z)=e^z.$$

Замечание 2. $K_{1+\beta}\left(t,\tau\right)_{\beta=0} = K_1\left(t,\tau\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}}e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}}$ [4].

Действительно $K_1\left(t,\tau\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}} - \dfrac{t^2}{4\sqrt{\pi}\left(t-\tau\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot {}_2F_2\left(1,\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2},2;-\dfrac{t^2}{4\left(t-\tau\right)}\right)$. Преобразуем функцию

$$ {}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2},2;-z\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1\right)_k}{\left(2\right)_k}\cdot\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{\left(k+1\right)!}\cdot\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\left(k+1\right)!} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{\left(k+1\right)!} = $$

$$ = \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \left\| e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right\| = \frac{1}{z}\left(e^z - 1\right). $$

Значит,

$$ K_1\left(t,\tau\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}} - \frac{1}{\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}}\cdot\frac{t^2}{4\left(t-\tau\right)}\cdot\left(-\frac{4\left(t-\tau\right)}{\alpha^2\left(t\right)}\right)\left[e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}} - 1\right] = $$

$$ = \frac{1}{\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}} + \frac{1}{\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}}e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}}e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}}. $$

Эти два замечания верны, так как это же можно получить непосредственно, положив в (1)–(2) $\beta = 0$, $\beta = 1$.

Определим порядок особенности ядра интегрального уравнения (6) — $K_{1+\beta}\left(t,\tau\right)$ (при $\tau\to t$ и $t\to 0$). Очевидно, что если $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_0^t K_{1+\beta}\left(t,\tau\right)d\tau = 0$, то данное ядро имеет слабую особенность, в противном случае интегральное уравнение (5) будет особым интегральным уравнением Вольтерра, которое может иметь неединственное решение. Воспользуемся следующим представлением ядра:

$$ \Gamma(1-\beta)K_{1+\beta}\left(t,\tau\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}}\cdot\frac{1}{t^\beta} - \frac{1}{\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}}\frac{2}{4\left(t-\tau\right)}\int\limits_0^x\frac{t-\eta}{\eta^\beta}\cdot e^{-\frac{(t-\eta)^2}{4(t-\tau)}}d\eta = k_1(t,\tau) - k_2(t,\tau). $$

Очевидно, что $\int\limits_0^t k_1(t,\tau)d\tau = \int\limits_0^t\dfrac{1}{\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}\cdot t^\beta}d\tau = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}t^{1/2-\beta}$.

$$ \int\limits_0^t k_2(t,\tau)d\tau = $$

$$ = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x\frac{d\eta}{\eta^\beta}\int\limits_{\frac{t-\eta}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-z^2}dz = \int\limits_0^x\frac{1}{\eta^\beta}erfc\left(\frac{t-\eta}{2\sqrt{t}}\right)d\eta; $$

$$ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^x\frac{x-\eta}{\eta^\beta}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}d\eta = \frac{4}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x\frac{1}{\eta^\beta}d\eta\int\limits_0^t\frac{x-\eta}{4\left(t-\tau\right)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}d\tau = $$

$$ = \int\limits_0^x\left(t-\xi\right)^{-\beta}\cdot erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t}}\right)d\xi = $$

$$ = -\frac{t^{3/2-\beta}}{\sqrt{\pi}}\cdot \mathrm{B}\left(2,1-\beta\right)\cdot {}_3F_3\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2};\frac{3-\beta}{2},\frac{2-\beta}{2}+1,\frac{3}{2};-\frac{t}{4}\right) + t^{1-\beta}B(1,1-\beta). \qquad (8) $$

Здесь

$$ {}_3F_3\left(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2,b_3;z\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_k\cdot\left(a_2\right)_k\cdot\left(a_3\right)_k}{\left(b_1\right)_k\cdot\left(b_2\right)_k\cdot\left(b_3\right)_k}\cdot\frac{z^k}{k!}. $$

Таким образом, имеем ($0<\beta<1$):

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t K_{1+\beta}(t,\tau)\,d\tau=\begin{cases}0, & \text{если}\quad 0<\beta<\dfrac{1}{2};\\ \dfrac{2}{\pi}, & \text{если}\quad \beta=\dfrac{1}{2};\\ \infty, & \text{если}\quad \dfrac{1}{2}<\beta<1.\end{cases} \tag{9}$$

Значит, при $0<\beta<\dfrac{1}{2}$ ядро интегрального уравнения (5) имеет слабую особенность, т.е. методом последовательных приближений можно найти его единственное решение. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $0<\beta<\dfrac{1}{2},$ тогда $\forall\lambda\in C,\ \forall f(x,t)\in L_\infty(D)\bigcap C(D)$ — граничная задача (1)–(2) имеет единственное решение $u(x,t)\in L_\infty(D)\bigcap C(D)$.

Выше мы показали, что если дифференциальный порядок нагруженного слагаемого есть производная целого порядка на многообразии $x=t,$ то единственность решения соответствующей задачи нарушалась, начиная со второго порядка (наличие сплошного спектра, количество собственных функций растет с возрастанием $|\lambda|$) [3, 8–11]. Теперь из соотношений (9) выясняется, что «нарушения», по всей видимости, начинаются «раньше» ($\beta={}^1\!/_2$), т.е. когда нагруженное слагаемое есть производная порядка 3/2.

Рассмотрим случай $\beta={}^1\!/_2.$ В этом случае интегральное уравнение (5) будет особым интегральным уравнением вида

$$\mu(t)-\lambda\int_0^t K_{3/2}(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau=f_2(t), \tag{10}$$

где

$$K_{3/2}(t,\tau)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{t(t-\tau)}}+\frac{2}{3\pi}\cdot\frac{t^{3/2}}{(t-\tau)^{3/2}}\cdot{}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{5}{4},\frac{7}{4};-\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Норма интегрального оператора, определяемого ядром $K_{3/2}(t,\tau)$ и действующего в пространстве суммируемых функций, равна ${}^2\!/_\pi\neq 0.$ Поэтому интегральное уравнение (10) не разрешимо методом последовательных приближений. Покажем, что соответствующее однородное уравнение при некоторых значениях параметра λ будет иметь ненулевые решения.

Исследования интегрального уравнения (10) и краевой задачи (1)–(2) для случая $1>\beta\geq{}^1\!/_2$ будут продолжены во второй части данной работы.

Список литературы

1 *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. — М.: Наука, 2012. — 232 с.

2 *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.

3 *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. — Алматы: Гылым, 2010. — 334 с.

4 *Жанболова А.К., Каршыгина Г.Ж.* О нагруженном уравнении теплопроводности с нагрузкой дробного порядка // Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики: Материалы Междунар. науч. конф. 12–14 июня. — Караганда, 2014. — С. 25, 26.

5 *Есбаев А.Н., Жанболова А.К., Петерс С.Н.* О первой краевой задаче для слабо-нагруженного параболического уравнения // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2012. — № 4 (68). — С. 31–37.

6 *Аттаев А.Х.* Задача Гурса для локально-нагруженного уравнения со степенным параболическим вырождением // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. — 2008. — Т. 10. — № 2. — С. 14–16.

7 *Дикинов Х.Ж., Керефов А.А., Нахушев А.М.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференциальные уравнения. — 1976. — Т. 12. — № 1. — С. 177–179.

8 *Akhmanova D.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E.* On the solutions of the homogeneous mutually conjugated Volterra integral equations // Bull. KSU. Ser. Mathematics — 2013. — № 2 (70). — С. 153–158.

9 *Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М. И.* Об особом интегральном уравнении Вольтерра второго рода со спектральным параметром // Сибирский математический журнал. — 2011. — Т. 52. — № 1. — С. 3–14.

10 *Амангалиева М.М., Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Краевые задачи для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности с приближением линии загрузки в нуль или бесконечность // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47. — № 2. — С. 231–243.

11 *Dzhenaliyev M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E.* On a Singular Volterra Integral Equations of the Third Kind // World Applied Sciences Journal. — 2013. — 26 (11). — P. 1424–1427.

А.Х.Аттаев, С.А.Ысқақов, Г.Ж.Қаршығина, М.Ы.Рамазанов

Бөлшекті жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші шеттік есеп I

Мақалада жазықтың ширегінде жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші шеттік есеп қарастырылған. Мұндағы жүктелген қосылғыш $x=t$ сызығында — бөлшек ретті туындының ізі. Есептің шешімі сығылмайтын өзекті екінші текті Вольтерра ерекше интегралдық теңдеуін зерттеуге келтірілді. Сипаттамалық теңдеуідің шешімімен регуляризациялау әдісін пайдаланып, Вольтерра ерекше интегралдық теңдеуінің $1/2 \le \beta < 1$ болғанда бос емес спектрі бар екені көрсетілген. Шектелмеген облыста біртекті шеттік есептің тривиалды емес шешімінің бар екені туралы теорема дәлелденді.

A.Kh.Attayev, S.A.Iskakov, G.Zh.Karshigina, M.I.Ramazanov

The first boundary problem for heat conduction equation with a load of fractional order I

In this paper we consider the first boundary value problem for a loaded heat conduction equation in a quarter plane. A loaded summand is the trace of the derivative of fractional order on the manifold $x=t.$ Solving of the problem is reduced to the study of singular Volterra integral equation of the second kind with incompressible kernel. Using the regularization method by solution of the characteristic equation it is shown that the singular Volterra integral equation have the non-empty spectrum a $1/2 \le \beta < 1.$ Theorem on the existence of a nontrivial solution of the homogeneous boundary value problem in an unbounded domain is proved.

References

1 Nakhushev A.M. *Loaded equations and their applications*, Moscow: Nauka, 2012, 232 p.

2 Nakhushev A.M. *Fractional calculus and its application*, Moscow: Fizmatlit, 2003, 272 p.

3 Dzhenaliyev M.T., Ramazanov M.I. *Loaded equation — how perturbed differential equations*, Almaty: Gylym, 2010, 334 p.

4 Zhanbolova A.K., Karshygina G.Zh. *Theoretical and applied problems of mathematics, mechanics and informatics*: Proceedings of the International Scientific Conference con (June, 12–14), 2014 Karaganda, 2014, p. 25–26.

5 Yesbayev A.N., Zhanbolova A.K., Peters S.N. *Bull. of the KSU. Ser. Mathematics*, 2012, 4 (68), p. 31–37.

6 Attayev A.Kh. *Docking frets Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences*, 2008, 10, 2, p. 14–16.

7 Deakinov Kh.Zh., Kerefov A.A., Nakhushev A.M. *Differ. equation*, 1976, 12, 1, p. 177–179.

8 Akhmanova D.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E. *Bull. of KSU. Ser. Mathematics*, 2013, 2 (70), p. 153–158.

9 Akhmanova D.M., Dzhenaliyev MT, Ramazanov M.I. *Siberian Mathematical Journal*, 2011, 52, 1, p. 3–14.

10 Amangaliyeva M.M., Akhmanova D.M., Dzhenaliyev M.T., Ramazanov M.I. *Differential equations*, 2011, 47, 2, p. 231–243.

11 Dzhenaliyev M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E. *World Applied Sciences Journal*, 2013, 26 (11), p. 1424–1427.