



Рис. 7

Тогда  $ah_a + bh_b + ch_c = 2S$ , где  $S$  — площадь данного треугольника. Сумма  $ah_a + bh_b + ch_c$  остается постоянной. Поэтому произведение  $ah_a \cdot bh_b \cdot ch_c$  достигает наибольшего значения, когда  $ah_a = bh_b = ch_c$ .

Вместе с  $ah_a \cdot bh_b \cdot ch_c$  достигает наибольшего значения и произведение  $h_a \cdot h_b \cdot h_c$ , так как  $a \cdot b \cdot c$  постоянно.

Эти значения  $h_a, h_b, h_c$  соответствуют такому положению точки  $O$ , при котором  $S_{AOB} = S_{AOC} = S_{BOC}$ . Эта точка  $O$  есть точка пересечения медиан треугольника.

Таким образом, рассмотренные экстремальные задачи богаты математическим содержанием, решаются различными способами, что вызывает у учащихся интерес к геометрии.

### References

1. Gotman E.G. Some tasks for minimum and maximum // Mathematics in school. — 1965. — № 1. — P. 19–22.
2. Fomin J. One task — some methods // Mathematics. — 2001. — № 31. — P. 8–12.
3. Sharigina I.F. The solution of the tasks: Tutorial for 10<sup>th</sup> form school pupils. — M.: Education, 1994.

УДК 517.51

## Новый метод нахождения частичной суммы степеней натуральных чисел

### The new method of finding of partial sum of degrees of the natural numbers

Дюсембаева Л.К., Башеева А.О.

Казахский агротехнический университет им. С.Сейфуллина, Астана (E-mail: basheeva@mail.ru)

Мақалада натурал сандардың дәрежелерінің қосындысын аналитикалық түрде табу зерттеледі. Математикалық талдау курс оқулықтарында негізгі бірінші ретті дәреже қосындысы қарастырылады, ал екінші ретті дәреже қосындысы жиі қарастырылмайды. Натурал сандардың дәрежелерінің қосындысын алгоритмдік тәсілмен табу ұсынылған. Әдіс натурал сандардың бірінші, екінші және үшінші ретті дәрежелерін табу мысалдар арқылы бейнеленген. Ұсынылып отырған алгоритм кез келген оң бүтін дәрежелі натурал сандардың қосындыларын қарастыруға мүмкіндік береді.

In the work the question on a finding of an analytical kind of the partial sum of degrees of natural numbers is considered. In a training course of the mathematical analysis given question is considered basically for the sum of degrees of the first order and seldom the second. In article the algorithmic method of calculation partial degrees of natural numbers is offered. The method is illustrated on examples of calculation of the partial sums of degrees of the first, the second and the third usages. The algorithm allows considering sums basically any positive whole degrees of natural numbers.

### Введение

Цель изучения высшей математики студентами, будущими учителями физики, как нам представляется, состоит в освоении ими основных понятий, идей и методов математики, причем без излишнего углубления в логически обосновательный аспект, и их практическом использовании при изучении курса физики.

В рамках любого «программного» раздела высшей математики для физиков-учителей есть свои методические вопросы, нуждающиеся в специальной проработке, с целью прояснить их сущность и сделать их более доступными для физиков.

Так, например, в курсе математического анализа еще до изучения темы «Определенный интеграл» было бы желательным ознакомить студентов с «конечными суммами степеней натуральных чисел», хотя бы в самом общем виде и привести их аналитические выражения. Последние могли бы быть использованы, например, при вычислении определенного интеграла от степенных функций, когда ставится цель — определить интеграл именно как предел суммы. Такой подход позволит нагляднее раскрыть геометрическую структуру определенного интеграла и, тем самым, четче уложить его в сознании обучаемых.

Однако возможность более широкого использования в учебном процессе суммы степеней натуральных чисел ограничена тем, что в учебных курсах математического анализа этому вопросу уделяется незаслуженно мало внимания: он остается практически неразработанным. Даже в таком солидном издании, как «Курс высшей математики» В.И.Смирнова [1], рассматривается случай вычисления суммы степеней не выше второго порядка, а сам этот процесс осуществляется скорее на уровне искусства, чем математически последовательно.

Аналитический вид этих сумм все же существует в литературе, но их можно найти лишь в сугубо специальных изданиях [2, 3]. Однако последние практически недоступны студентам, как в техническом отношении (они не рассчитаны на «ширпотреб»), так и в теоретическом (соответствующая информация приводится без вывода и, к тому же, содержит [3] специальные функции типа гамма- и дзета-функций, о которых у первокурсников, естественно, нет никаких представлений).

В данной работе предпринята попытка по-новому подойти к вопросу вычисления частичных сумм степеней натуральных чисел. Предлагаемый метод основан на одной простой идее — представлении частичной суммы степеней натуральных чисел в виде определенного интеграла от многочлена той же степени, что и соответствующая степень под суммой. Расчеты проведены до третьей степени включительно (но метод применим в принципе для суммирования любых степеней натуральных чисел), и все они совпадают с известными [3]. Существенно, что здесь для отыскания неопределенных коэффициентов многочлена нет необходимости выходить за рамки исследуемого равенства  $S_n = I$ , где  $I$  — определенный интеграл от многочлена;  $S_n$  — частичная сумма.

### §1. Сущность метода

На простом примере вычисления частичной суммы первой степени натуральных чисел:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n \equiv \sum_{k=1}^n k \equiv \sum_{k=1}^n f(k) \quad (1)$$

мы попытаемся проиллюстрировать существенные моменты предлагаемого нами метода.

Это, во-первых, возможность использования здесь определенного интеграла. Во-вторых, установление пределов интеграла. В-третьих, выявление общей структуры подынтегральной функции.

Итак, совершим следующее очевидное преобразование:

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n k \cdot \Delta k, \quad \Delta k = 1. \quad (2)$$

Правая часть соотношения (2) геометрически представляет собой суммарную площадь  $n$  прямоугольников с высотами

$$f(k_1) = 1, \quad f(k_2) = 2, \dots, f(k_n) = n \quad (3)$$

и основаниями, соответственно,

$$\Delta k_1 = k_2 - k_1; \quad \Delta k_2 = k_3 - k_2, \dots, \Delta k_n = k_{n+1} - k_n; \quad k_i = i = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Обратим внимание на то, что здесь число  $n$  геометрически характеризует количество прямоугольников, а  $n+1$  есть верхняя граница переменной  $k$ .

Пусть значения переменной  $k$  откладываются на горизонтальной оси  $X$ , а значения величины  $f(k)$  — на вертикальной оси  $Y$ .

Проведем на плоскости  $XOY$  из точки  $(0;0)$  прямую  $f(k) = k$ , которая пройдет через верхние левые вершины всех  $n$  прямоугольников. Тогда площадь этих  $n$  прямоугольников  $S_n$  будет равна следующей разности:

$$S_{TP} - \sigma_{TP} = S_n, \quad (5)$$

где  $S_{TP}$  — площадь прямоугольного треугольника с катетами  $\Delta x = n + 1$  и  $\Delta y = n + 1$ , т.е.

$$S_{TP} = \frac{(n+1) \cdot (n+1)}{2}. \quad (6)$$

Величина  $S_{TP}$  — суммарная площадь всех малых одинаковых прямоугольных треугольников, число которых равно  $n+1$ , с катетами

$$\delta x_i = k_i - k_{i-1} = 1, \quad \delta y_i = f(k_i) - f(k_{i-1}) = 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n+1, \dots, k_{i-1} = 0; \quad (7)$$

$$\sigma_{TP} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\delta x_i \cdot \delta y_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} 1 = \frac{1}{2}(n+1). \quad (8)$$

Итак, с учетом (6) и (8) искомая площадь будет равна

$$S_n = \frac{(n+1)(n+1)}{2} - (n+1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (9)$$

С другой стороны, площадь большого прямоугольного треугольника,  $S_n$ , может быть представлена также и в виде определенного интеграла от  $k = 0$  до  $k = n+1$  функции  $f(k)$ , где  $k$  теперь будет считаться непрерывной переменной:

$$S_{TP} = \int_0^{n+1} f(k) \cdot dk = \int_0^{n+1} k \cdot dk = \frac{(n+1)^2}{2}. \quad (10)$$

Соответственно, площадь всех малых треугольников представим в виде

$$\sigma_{TP} = \frac{1}{2} \int_0^{n+1} dk = \frac{1}{2}(n+1). \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в соотношение (5), получим:

$$\sum_{k=1}^n k = \int_0^{n+1} \left(k - \frac{1}{2}\right) dk. \quad (12)$$

Как видно из (12), нижний предел интеграла на единицу меньше нижнего предела суммы, а верхний предел — на единицу больше верхнего предела суммы:

$$\sum_{k=1}^n \rightarrow \int_0^{n+1} dk, \quad k \in [0, n+1]. \quad (13)$$

Совершим в правой части (12) очевидное преобразование в виде

$$\int_0^{n+1} \left(k - \frac{1}{2}k^0\right) \cdot dk, \quad k^0 = 1 \quad (14)$$

и с учетом последнего запишем (12) в форме

$$\sum_{k=1}^n k = \int_0^{n+1} \left(k - \frac{1}{2}k^0\right) \cdot dk. \quad (15)$$

Обратим особое внимание на следующее обстоятельство. Подынтегральная функция в (15) содержит, во-первых, ту же степень, что и сумма, и, во-вторых, еще один член — степень, порядок которой на единицу ниже, чем порядок степени под суммой, причем эта степень умножена на константу, в данном случае на  $\left(\frac{1}{2}\right)$ .

Рассмотрев этим методом суммирование последующих степеней ( $q=2,3,\dots$ ), можем заметить определенную закономерность в структуре подынтегрального выражения, которую обобщим на случай произвольного значения  $q$ :

$$\sum_{k=1}^n k^q = \int_0^{n+1} \left[ k^q + a_1 k^{q-1} + a_2 \cdot k^{q-2} + \dots + a_{q-1} k^{q-(q-1)} + a_q \cdot k^0 \right] dk, \quad (16)$$

где  $q=1,2,3,\dots$   $a_i$  — произвольные коэффициенты подынтегрального многочлена, которые требуется определить.

Важной стороной данного метода является то, что эти коэффициенты определяются из самого соотношения (16).

Так, если имеется только  $a_1$  (случай  $q=1$ ), то для его определения достаточно положить в (16)  $n=1$ . Если же имеется два ( $q=2$ ) коэффициента  $a_1$  и  $a_2$ , то в (16) надо последовательно положить  $n=1$  и  $n=2$ . При этом получается система двух уравнений типа

$$\begin{cases} \alpha_1^{(1)} a_1 + \alpha_2^{(1)} a_2 + \alpha_3^{(1)} = 0, & n=1; \\ \alpha_1^{(2)} a_1 + \alpha_2^{(2)} a_2 + \alpha_3^{(2)} = 0, & n=2 \end{cases} \quad (17)$$

(где  $\alpha_i$  — известные вещественные числа), откуда могут быть определены неизвестные  $a_1$  и  $a_2$  и т.д.

### §2. Примеры вычисления суммы степеней

1. Выше мы рассмотрели случай вычисления суммы первой ( $q=1$ ) степени и нашли, что

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}. \quad (18)$$

2. Рассмотрим теперь случай с  $q=2$ . Тогда согласно соотношению (16) будем иметь:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \int_0^{n+1} (k^2 + a_1 k + a_2) \cdot dk. \quad (19)$$

Проведя здесь интегрирование, получим

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)^3}{3} + a_1 \cdot \frac{(n+1)^2}{2} + a_2 \cdot (n+1). \quad (20)$$

Определим неизвестные коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$ . Для этого в (20), последовательно полагая  $n=1$  и  $n=2$ , придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 6a_1 + 6a_2 + 5 = 0, & n=1; \\ 9a_1 + 6a_2 + 8 = 0, & n=2. \end{cases} \quad (21)$$

Разрешая эту систему, получим

$$a_1 = -1, \quad a_2 = \frac{1}{6}. \quad (22)$$

Подставляя найденные коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$ , в (20), придем к следующему соотношению:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (23)$$

3. Случай  $q=3$ .

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{(n+1)^4}{4} + a_1 \frac{(n+1)^3}{3} + a_2 \frac{(n+1)^2}{2} + a_3(n+1). \quad (24)$$

Здесь имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 16a_1 + 12a_2 + 12a_3 + 18 = 0, & n=1; \\ 36a_1 + 18a_2 + 12a_3 + 45 = 0, & n=2; \\ 64a_1 + 24a_2 + 12a_3 + 84 = 0, & n=3. \end{cases} \quad (25)$$

Разрешая эту систему уравнений, получим, что

$$a_1 = -\frac{3}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 0. \quad (26)$$

Подставляя эти значения коэффициентов в (24) и затем проведя элементарные преобразования в нем, найдем, что

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \quad (27)$$

Аналогичным образом можно найти аналитический вид сумм степеней натуральных чисел для случаев  $q=4,5,6,\dots$ . Чтобы иметь возможность сравнить полученные выше результаты с известными, выпишем последние [3]:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^q &= \frac{n^{q+1}}{q+1} + \frac{n^q}{2} + \frac{1}{2} \binom{q}{1} B_2 \cdot n^{q-1} + \frac{1}{4} \binom{q}{3} B_4 \cdot n^{q-3} + \dots = \\ &= \frac{n^{q+1}}{q+1} + \frac{n^q}{2} + \frac{q \cdot n^{q-1}}{12} - \frac{q(q-1)(q-2)}{720} \cdot n^{q-3} + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь коэффициенты  $B_{2m}$  — это так называемые числа Бернулли [3], которые в свою очередь вычисляются посредством специальных вещей — гамма-функции ( $\Gamma(n)$ ) и дзета-функции Римана [3].

Нетрудно усмотреть, что наши результаты, представленные в виде соотношений (18), (22) и (27), в точности совпадают с (28) для последовательно взятых  $q = 1, 2, 3$ .

Чтобы иметь дело с суммами обратных степеней натуральных чисел, методику вычисления надо несколько изменить. Так, если для нахождения суммы положительных степеней натуральных чисел,  $F(n)$ , мы разлагали ее в ряд по определенным интегралам от степенных функций  $x^\alpha$  ( $\alpha = q, q-1, \dots, 0; \alpha \geq 0$ ), то в обратном случае, т.е. при нахождении суммы вида

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k; q)}, \quad f(k, q) = k^q, \quad (29)$$

встречаемся, как правило, с разложением другого рода, а именно, с разложением в ряд Фурье некоторой функции  $Q(x)$ , которая в общем случае является кусочно-гладкой.

Считается, что она определена на произвольном сегменте  $[-l, l]$ , где может иметь конечное число точек разрыва, максимумов и минимумов, и абсолютно интегрируема на этом сегменте (речь идет о разложении  $F(x)$  в тех точках сегмента, где она имеет конечные производные).

Поэтому данный «случай» может рассматриваться в учебном курсе анализа лишь после рядов Фурье.

#### References

1. Smirnov V.I. The course of high mathematics. — 5 ed. — M.: GITTL, 1954. — P. 207, 208.
2. Vinogradov I.M. Mathematical encyclopaedia. — M.: Sov. encyclopedia, 1985. — P. 935.
3. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums, series and products. — M.: Science, 1971. — 1108 p.