Онда жалпы жылу физикасының заңдарына сәйкес серпімділік деформациясының стержень ұзындығы бойынша таралу заңдылығы төмендегі өрнектен табылады [1]:

$$\varepsilon_x = \varepsilon - \varepsilon_T(x). \qquad (25)$$

Ал Гук заңына сәйкес серпімділік кернеуінің стержень ұзындығы бойынша таралу заңдылығы анықталады:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \sigma - \sigma_T. \qquad (26)$$

Мұнда жоғарыда келтірілген әдіс ерекше әмбебап болып әр түрлі күрделі жылу көздері әсеріндегі серпімділі денелерде болатын термо-механикалық күйлерді анықтау мәселелерін түгелдей шешуге мүмкіндік береді. Бұл әдіс энергияның сақталу заңына негізделгендіктен, алынған нәтижелердің дәлдігі өте жоғары болады. Сондықтан да бұл әдіспен көптеген өзекті инженерлік мәселелерді өте жоғары дәлдікпен шешуге болады.

References

1. *Nostrils V.F.* Course of Thermodynamics. — M.: Prosveshenie, 1967. — 248 p.
2. *Segerlind L.* Application of the finite element method. — M.: Mir, 1979. — 392 p.
3. *Berger I.A., Panovko Y.G.* Durability. Stability. Fluctuations. — T. 1. — M.: Publishing house «Mechanical engineering», 1968. — 568 p.

УДК 517.5

О проблеме множителей в анизотропных пространствах Лоренца

About the problem of multipliers in the anisotropic Lorentz spaces

Тлеуханова Н.Т., Джумабаева А.А.

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана
(E-mail: tleukhanova@rambler.ru)

Анизотропты Лоренц кеңістігінде анықталған көбейткіштер есебі қарастырылған. f функциясының Фурье коэффициенттері $l_{\bar{p}_0\bar{q}_0}$ класына жатқанда, φf функциясының Фурье коэффициенттері анизотропты Лоренц $l_{\bar{p}_1\bar{q}_1}$ класына жататындай «көбейткіш» деп аталатын φ функциясына шарттар зерттелген. Мақалада φ функциясы үшін анизотропты $M_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}^{\bar{p}_1,\bar{q}_1}$ класында жататын көбейткіш болуының жеткілікті шарты алынған. Бұл шарттар «анизотропты толық вариация» терминінде анықталған. Дәлелдеуі көп өлшемді Риман-Стилтьес интегралының қасиеттеріне негізделген.

The problem of multipliers defined on the anisotropic Lorentz space is considered, namely we study conditions on the function φ, called a "multiplier" in which the Fourier coefficients φf belong to the class of anisotropic Lorentz $l_{\bar{p}_1\bar{q}_1}$ when the Fourier coefficients f belong to $l_{\bar{p}_0\bar{q}_0}$. We obtained sufficient conditions that multipliers φ belong to space $M_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}^{\bar{p}_1,\bar{q}_1}$. These conditions are expressed in terms of anisotropic total variation. The proof is based on the properties of the multidimensional integral Riemann-Stieltjes.

Пусть $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $\bar{q} = (q_1, q_2)$ — вектора такие, что, если $0 < q_j < \infty$, то $0 < p_j < \infty$, если же $q_j = \infty$, то $0 < p_j \le \infty$, $j = 1,2$. В дальнейшем будем считать, что вектора $\bar{p}$ и $\bar{q}$ удовлетворяют этим условиям.

Пусть $f \in L_1\left(\left[0,1\right]^2\right)$ и $\left\{a_{k_1k_2}(f)\right\}_{k_1=-\infty,k_2=-\infty}^{\infty,\infty}$ — ее последовательность коэффициентов Фурье по тригонометрической системе $\left\{e^{2\pi i(k_1x_1+k_2x_2)}\right\}_{k_1=-\infty,k_2=-\infty}^{\infty,\infty}$.

Через $l_{\overline{pq}}$ определим анизотропное дискретное пространство Лоренца

$$l_{\overline{pq}} = \left\{ \left\{ a_{s_1 s_2} \right\}_{s_1 \in Z, s_2 \in Z} : \|a\|_{l_{\overline{pq}}} = \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{\frac{q_2}{p_2}-1} \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{\frac{q_1}{p_1}-1} (a_{k_1 k_2}^{**})^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \right)^{\frac{1}{q_2}} < \infty \right\},$$

где $a_{k_1k_2}^{**}$ — невозрастающая перестановка последовательности $\{a_{s_1s_2}\}_{s_1\in Z, s_2\in Z}$, взятая последовательно соответственно по переменным s_1, s_2.

Будем предполагать, что функция f обладает свойствами, достаточными, чтобы $\left\{a_{k_1k_2}(f)\right\} \in l_{\bar{p},\bar{q}}, \bar{1} \le \bar{p}, \bar{q} \le \infty.$ Возьмем функцию $\varphi \in L_1\left(\left[0,1\right]^2\right).$

Рассмотрим отображение

$$T_\varphi : \left\{a_{k_1k_2}(f)\right\} \to \left\{c_{k_1k_2}(f\varphi)\right\},$$

где $\left\{c_{k_1k_2}(f\varphi)\right\}_{k_1=-\infty, k_2=-\infty}^{\infty,\infty}$ — последовательность коэффициентов Фурье функции φf.

Будем говорить, что функция φ принадлежит классу $M_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}^{\bar{p}_1,\bar{q}_1}$, если линейный оператор T_φ ограничен из $l_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}$ в $l_{\bar{p}_1,\bar{q}_1}$ и

$$\|\varphi\|_{M_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}^{\bar{p}_1,\bar{q}_1}} = \left\|T_\varphi\right\|_{l_{\bar{p}_0,\bar{q}_0} \to l_{\bar{p}_1,\bar{q}_1}} = \sup_{\|a(f)\|_{l_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}} \ne 0} \frac{\|c(f\varphi)\|_{l_{\bar{p}_1,\bar{q}_1}}}{\|a(f)\|_{l_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}}}.$$

Задача заключается в нахождении гладкостных и метрических характеристик функции φ, гарантирующих ограниченность оператора T_φ из $l_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}$ в $l_{\bar{p}_1,\bar{q}_1}$.

При $p=q$ в скалярном случае данная задача рассматривалась в работах С.Б.Стечкина [1], И.И.Хиршмана [2]. Результаты были получены в терминах пространств Гельдера и ограниченной β-вариации. Распространение на многомерный случай этих утверждений сделал С.Л.Эдельштейн [3] в 1977 г. Дальнейшее развитие данная тема получила в работах М.Ш.Бирмана и М.З.Соломяка [4] в терминах пространств Соболева. Эти результаты были усилены Г.Е.Караджовым [5] с помощью классов Бесова. Класс $M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}$ рассматривался в работах Е.С.Смаилова и Н.Т.Тлеухановой [6, 7] в терминах пространств Бесова и Лоренца.

Дадим определение анизотропных сетевых пространств $N_{\overline{pq}}$, которые рассматривались в работе [8].

Рассмотрим функционал

$$\Phi_{\overline{pq}}(\varphi) = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left| t_1^{\frac{1}{p_1}} t_2^{\frac{1}{p_2}} \varphi(t_1,t_2) \right|^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}. \tag{1}$$

Здесь выражение $\left(\int_0^\infty \left(F(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$ при $q=\infty$ понимается как $\sup_{t>0} F(t).$

Под областью определения функционала $\Phi_{\overline{pq}}$ будем понимать множество всех определенных на $\left(0,\infty\right)^2$, монотонно невозрастающих по каждому аргументу функций $\varphi\left(t_1,t_2\right)$, для которых конечна величина (1).

Пусть μ — линейная мера Лебега; S — множество всех измеримых подмножеств e из $[0,1]$ таких, что $0<\mu e<\infty.$ Фиксированное семейство множеств $M \subset S$ назовем сетью в $[0,1]$. Пусть M_1, M_2 — соответственно сети в $[0,1]$. Рассмотрим семейство множеств M в $[0,1]^2$ вида

$$M = \{e = e_1 \times e_2 \subset [0,1]^2 : e_j \in M_j, j = 1,2.\},$$

т.е. $M = M_1 \times M_2$, которое будем называть сетью в $[0,1]^2$. Для функции $f(x) = f(x_1, x_2)$, интегрируемой на каждом e из M, определим функцию

$$\overline{f}(t;M) = \overline{f}(t_1, t_2; M) = \sup_{|e_j| > t_j, e \in M} \frac{1}{|e|} \left| \int_e f(x)dx \right|.$$

Здесь $e = e_1 \times e_2$; $|e_j| = \mu e_j$; $|e| = |e_1| \cdot |e_2|$.

Пусть $0 < \overline{p} = (p_1, p_2)$, $\overline{q} = (q_1, q_2) \le \infty$. Через $N_{\overline{pq}}$ обозначим множество всех измеримых функций f от двух переменных, для которых

$$\|f\|_{N_{\overline{pq}}} = \Phi_{\overline{pq}}\left(\overline{f}(.;M)\right) < \infty.$$

Пусть на $[0,1] \times [0,1]$ задана функция $f(x, y)$. Через $\underset{T}{V} f$ будем обозначать полную вариацию функции $f(x, y)$ по множеству $[0,1] \times [0,1]$, которую определим следующим образом:

$$\underset{T}{V} f = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \left| f(x_n, y_m) - f(x_{n-1}, y_m) - f(x_n, y_{m-1}) + f(x_{n-1}, y_{m-1}) \right|,$$

где T — произвольное разбиение промежутка $[0,1] \times [0,1]$. Если величина

$$\overset{1,1}{\underset{0,0}{V}}(f) = \sup_T V_T(f) < \infty,$$

то будем говорить, что функция $f(x, y)$ есть функция ограниченной вариации на промежутке $[0,1] \times [0,1]$ $\left(f(x, y) \in V([0,1] \times [0,1])\right)$.

Пусть заданы функции $f(x, y), g(x, y)$, определенные на множестве $[a,b] \times [c,d]$. Для произвольного разбиения отрезков $[a,b] = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b\}$ и $[c,d] = \{c = y_0 < y_1 < ... < y_{m-1} < y_m = d\}$ с отмеченными точками $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\eta \in [y_{j-1}, y_j]$ при $i = 1,2,...n$, $j = 1,2,...m$ построим интегральную сумму

$$S_g(f,T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\left(g(x_i, y_j) - g(x_{i-1}, y_j) - g(x_i, y_{j-1}) + g(x_{i-1}, y_{j-1})\right).$$

Если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} S_g(f,T) = I,$$

где параметр разбиения $\lambda(T) = \max\limits_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$, то число I называется интегралом Римана-Стилтьеса на прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$ функции $f(x, y)$ по функции $g(x, y)$ и обозначается

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dg(x, y).$$

Следующие леммы выражают свойства интеграла Римана-Стилтьеса, которые будут использоваться в дальнейшем.

Лемма 1 (формула интегрирования по частям). Если существует интеграл

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dg(x, y),$$

то существует и интеграл

$$\int_a^b \int_c^d g(x, y) df(x, y).$$

Причем

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dg(x, y) = \int_a^b \int_c^d g(x, y) df(x, y) - \int_a^b g(c, y) df(c, y) - \int_c^d g(a, y) df(a, y) + \int_a^b g(x, d) df(x, d) +$$

$$+ \int_c^d g(b, y) df(b, y) + f(a,c)g(a,c) - 2f(b,c)g(b,c) - 2f(a,d)g(a,d) + f(b,d)g(b,d).$$

Доказательство. Пусть $[a,b]=\{a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b\}$ и $[c,d]=\{c=y_0<y_1<...<y_{m-1}<y_m=d\}$ — разбиение отрезков $[a,b]$ и $[c,d]$ соответственно с отмеченными точками $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $\eta\in[y_{j-1},y_j]$ при $i=1,2,...n$, $j=1,2,...m.$ Тогда имеем

$$S_g(f,T)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(\xi_i,\eta_j)\Big(g(x_i,y_j)-g(x_{i-1},y_j)-g(x_i,y_{j-1})+g(x_{i-1},y_{j-1})\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(\xi_i,\eta_j)g(x_i,y_j)-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}f(\xi_{i+1},\eta_j)g(x_i,y_j)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}f(\xi_i,\eta_{j+1})g(x_i,y_j)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}f(\xi_{i+1},\eta_{j+1})g(x_i,y_j)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}g(x_i,y_j)\Big(f(\xi_i,\eta_j)-f(\xi_{i+1},\eta_j)-f(\xi_i,\eta_{j+1})-f(\xi_{i+1},\eta_{j+1})\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}g(x_i,y_m)f(\xi_i,\eta_m)+\sum_{j=1}^{m-1}g(x_n,y_j)f(\xi_n,\eta_j)-\sum_{j=1}^{m}g(x_0,y_j)f(\xi_1,\eta_j)-\sum_{i=0}^{n-1}g(x_i,y_m)f(\xi_{i+1},\eta_m)-$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1}g(x_n,y_j)f(\xi_n,\eta_{j+1})-\sum_{i=1}^{n}g(x_i,y_0)f(\xi_i,\eta_1)+\sum_{j=1}^{m-1}g(x_0,y_j)f(\xi_1,\eta_{j+1})+\sum_{i=0}^{n-1}g(x_i,y_0)f(\xi_{i+1},\eta_1)=$$

$$=\Bigg(\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}g(x_i,y_j)\big(f(\xi_i,\eta_j)-f(\xi_{i+1},\eta_j)-f(\xi_i,\eta_{j+1})-f(\xi_{i+1},\eta_{j+1})\big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}g(x_i,y_0)\big(f(\xi_i,\eta_0)-f(\xi_{i+1},\eta_0)-f(\xi_i,\eta_1)+f(\xi_{i+1},\eta_1)\big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}g(x_0,y_j)\big(f(\xi_0,\eta_j)-f(\xi_1,\eta_j)-f(\xi_0,\eta_{j+1})+f(\xi_1,\eta_{j+1})\big)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}g(x_i,y_m)\big(f(\xi_i,\eta_m)-f(\xi_{i+1},\eta_m)-f(\xi_i,\eta_{m+1})+f(\xi_{i+1},\eta_{m+1})\big)+$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}g(x_n,y_j)\big(f(\xi_n,\eta_j)-f(\xi_{n+1},\eta_j)-f(\xi_n,\eta_{j+1})+f(\xi_{n+1},\eta_{j+1})\big)\Bigg)+\sum_{i=0}^{n-1}g(x_i,y_0)\big(f(\xi_i,\eta_0)-f(\xi_{i+1},\eta_0)\big)$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}g(x_0,y_j)\big(f(\xi_0,\eta_{j+1})-f(\xi_0,\eta_j)\big)+\sum_{i=1}^{n}g(x_i,y_m)\big(f(\xi_{i+1},\eta_{m+1})-f(\xi_i,\eta_{m+1})\big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}g(x_n,y_j)\big(f(\xi_{n+1},\eta_j)-f(\xi_{n+1},\eta_j)\big)+f(\xi_0,\eta_0)g(x_0,y_0)-2f(\xi_{n+1},\eta_0)g(x_n,y_0)-$$

$$-f(\xi_0,\eta_{m+1})g(x_0,y_m)+f(\xi_{n+1},\eta_{m+1})g(x_n,y_m)=$$

$$=\int_a^b\int_c^d g(x,y)df(x,y)-\int_a^b g(c,y)df(c,y)-\int_c^d g(a,y)df(a,y)+\int_a^b g(x,d)df(x,d)+$$

$$+\int_c^d g(b,y)df(b,y)+f(a,c)g(a,c)-2f(b,c)g(b,c)-2f(a,d)g(a,d)+f(b,d)g(b,d),$$

где $\xi_0=a,\eta_0=c,\xi_{n+1}=b,\eta_{m+1}=d.$ Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$, а функция $g(x,y)\in V\big([a,b]\times[c,d]\big)$, тогда существует интеграл

$$I=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dg(x,y),$$

причем

$$|I|\le\max_{x\in[a,b],y\in[c,d]}|f(x,y)|\mathop{V}_{a,c}^{b,d}\big(g(x,y)\big). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$. Пользуясь равномерной непрерывностью функции $f(x,y)$ на компакте $A=[a,b]\times[c,d]$, подберем $\delta>0$ так, чтобы при $\overline{x},\overline{y}\in A$ и $\rho(\overline{x},\overline{y})<\delta$ выполнялось неравенство

$$\left|f(\bar{x})-f(\bar{y})\right|<\frac{\varepsilon}{2\left(\overset{b,d}{\underset{a,c}{V}}(g)+1\right)}.$$

Пусть $T_{1,x}, T_{2,x}$ — два разбиения отрезка $[a,b]$ и $T_{1,y}, T_{2,y}$ — два разбиения отрезка $[c,d]$ с отмеченными точками, что $\lambda(T_1), \lambda(T_2)<\delta$. Объединяя точки разбиений $T_{1,x}$ и $T_{2,x}$, составим разбиение T_x и произвольным образом выберем для него отмеченные точки. Пусть $T_{1,x}=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b\}$. Тогда

$$T_x=\{a=x_0=x_{1,0}<x_{1,1}<\ldots<x_{1,k_1}=x_1=x_{2,0}<x_{2,1}<\ldots<x_{n,k_n}=b\}.$$

Таким же образом возьмем $T_y=\{c=y_0=y_{1,0}<y_{1,1}<\ldots<y_{1,k_1}=y_1=y_{2,0}<y_{2,1}<\ldots<y_{m,k_m}=b\}$, объединяя точки разбиений $T_{1,y}$ и $T_{2,y}$, при этом

$$\left|S_g(f,T)-S_g(f,T_1)\right|=\Bigg|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(\xi_i,\eta_j)\big(g(x_i,y_j)-g(x_{i-1},y_j)-g(x_i,y_{j-1})+g(x_{i-1},y_{j-1})\big)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\upsilon=1}^{k_i}\sum_{\mu=1}^{l_j}f(\xi_{i,\upsilon},,\eta_{j,\mu})\big(g(x_{i,\upsilon},y_{j,\mu})-g(x_{i,\upsilon-1},y_{j,\mu})-g(x_{i,\upsilon},y_{j,\mu-1})+g(x_{i,\upsilon-1},y_{j,\mu-1})\big)\Bigg|=$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\upsilon=1}^{k_i}\sum_{\mu=1}^{l_j}\big(f(\xi_i,\eta_j)-f(\xi_{i,\upsilon},,\eta_{j,\mu})\big)\big(g(x_{i,\upsilon},y_{j,\mu})-g(x_{i,\upsilon-1},y_{j,\mu})-g(x_{i,\upsilon},y_{j,\mu-1})+g(x_{i,\upsilon-1},y_{j,\mu-1})\big)\right|\le$$

$$\le\max_{i,j,\upsilon,\mu}\left|f(\xi_i,\eta_j)-f(\xi_{i,\upsilon},,\eta_{j,\mu})\right|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\upsilon=1}^{k_i}\sum_{\mu=1}^{l_j}\left|g(x_{i,\upsilon},y_{j,\mu})-g(x_{i,\upsilon-1},y_{j,\mu})-g(x_{i,\upsilon},y_{j,\mu-1})+g(x_{i,\upsilon-1},y_{j,\mu-1})\right|\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2(\overset{b,d}{\underset{a,c}{V}}(g)+1)}\overset{b,d}{\underset{a,c}{V}}(g)\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку такая же оценка справедлива и для $\left|S_g(f,T)-S_g(f,T_2)\right|$, то получим, что $\left|S_g(f,T_1)-S_g(f,T_2)\right|<\varepsilon$. Применяя критерий Коши, убеждаемся в существовании интеграла. Так как для любого разбиения T имеем $\left|S_g(f,T)\right|\le\max\limits_{x\in[a,b],y\in[c,d]}\left|f(x,y)\right|\overset{b,d}{\underset{a,c}{V}}\big(g(x,y)\big)$, то справедливо и неравенство (2). Лемма доказана.

Теорема A([8]). Пусть $2\le\bar{p}<\infty$, $1\le\bar{q}<\infty$, $\bar{p}'=\dfrac{\bar{p}}{\bar{p}-1}$, $f\approx\sum\limits_{\bar{k}\in Z^2}a_{\bar{k}}e^{2\pi i(\bar{k},\bar{x})}$.

a) Если M_0 — множество всех прямоугольников в $[0,1]^2$, то верно неравенство

$$\|f\|_{N_{\bar{p}',\bar{q}}(M_0)}\le c\|a\|_{l_{\bar{p},\bar{q}}}, \tag{3}$$

где константа c зависит только от параметра $\bar{p}$ и $\bar{q}$.

b) Если W_0 — множество всех прямоугольников в N^2, то верно неравенство

$$\|a\|_{n_{\bar{p},\bar{q}}(W_0)}\le c\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{q}}([0,1]^2)},$$

где константа c зависит только от параметра $\bar{p}$ и $\bar{q}$.

Теорема. Пусть $1<\bar{p}_0,\bar{p}_1,\bar{r}<\infty$, $1\le\bar{q}_0,\bar{q}_1,\bar{s}\le\infty$, $\dfrac{1}{\bar{p}_1}+\dfrac{1}{\bar{r}}=\dfrac{1}{\bar{p}_0}$, $\dfrac{1}{\bar{q}_1}=\dfrac{1}{\bar{q}_0}+\dfrac{1}{\bar{s}}$, тогда верно следующее неравенство:

$$\|\varphi\|_{M_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}^{\bar{p}_1,\bar{q}_1}}\le c\left(\Big(\sum_{k_2=0}^{\infty}k_2^{\frac{s_2}{r_2}-1}\Big(\sum_{k_1=0}^{\infty}k_1^{\frac{s_1}{r_1}-1}\Big(2^{-k_1-k_2}\int_{2^{-k_2-1}}^{2^{-k_2}}\int_{2^{-k_1-1}}^{2^{-k_1}}|d\varphi(x,y)|\Big)^{s_1}\Big)^{\frac{s_2}{s_1}}\Big)^{\frac{1}{s_2}}+\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\Big(2^{-\frac{k_1}{r_1}}\int_{2^{-k_1-1}}^{2^{-k_1}}|d\varphi|\Big)^{s_1}\right)^{\frac{1}{s_1}}+\right.$$

$$+\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\Big(2^{-\frac{k_2}{r_2}}\int\limits_{2^{-k_2-1}}^{2^{-k_2}}|\,d\varphi\,|\Big)^{s_2}\right)^{\frac{1}{s_2}}+\left|\varphi(1,1)\right|\Big).$$

Доказательство. В анизотропных пространствах Лоренца имеет место неравенство Юнга

$$\|a*\lambda\|_{l_{\bar p_1\bar q_1}}\le c\|a\|_{l_{\bar p_0,\bar q_0}}\,\|\lambda\|_{l_{\bar r'\bar s}},$$

где $\dfrac{1}{\bar p_1}+1=\dfrac{1}{\bar p_0}+\dfrac{1}{\bar r'},\ \dfrac{1}{\bar q_1}=\dfrac{1}{\bar q_0}+\dfrac{1}{\bar s}.$

Пусть $\lambda=\left\{\lambda_{k_1k_2}\right\}_{k_1=1,k_2=1}^{\infty\infty}$ — последовательность коэффициентов Фурье функции $\varphi(x,y)$. Используя двойственное представление нормы в анизотропном пространстве Лоренца и равенство Парсеваля, имеем

$$\|\lambda\|_{l_{\bar r'\bar s}}=\sup_{\|b\|_{l_{\bar r\bar s'}}=1}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{\infty}\lambda_{k_1k_2}b_{k_1k_2}=\sup_{\|b\|_{l_{\bar r\bar s'}}=1}\int\limits_0^1\int\limits_0^1\varphi(x,y)g(x,y)dxdy,$$

где $g(x,y)$ — функция с коэффициентами Фурье $b=\left\{b_{k_1,k_2}\right\}_{k_1=0,k_2=0}^{\infty\infty}$. Далее, применяя лемму 1, мы получим следующее равенство:

$$\sup_{\|b\|_{l_{\bar r\bar s'}}=1}\int\limits_0^1\int\limits_0^1\varphi(x,y)g(x,y)dxdy=\sup_{\|b\|_{l_{\bar r\bar s'}}=1}\int\limits_0^1\int\limits_0^1\varphi(x,y)\left(\int\limits_0^x\int\limits_0^y g(s,t)dsdt\right)'dxdy=$$

$$=\sup_{\|b\|_{l_{\bar r\bar s'}}=1}\Big(\int\limits_0^1\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^x\int\limits_0^y g(s,t)dsdt\Big)d\varphi(x,y)+\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^x\int\limits_0^0 g(s,t)dsdt\Big)d\varphi(x,0)+\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^0\int\limits_0^y g(s,t)dsdt\Big)d\varphi(0,y)+$$

$$+\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^x\int\limits_0^1 g(s,t)dsdt\Big)d\varphi(x,1)+\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^1\int\limits_0^y g(s,t)dsdt\Big)d\varphi(1,y)+\varphi(0,0)\int\limits_0^0\int\limits_0^0 g(s,t)dsdt-$$

$$-2\varphi(1,0)\int\limits_0^1\int\limits_0^0 g(s,t)dsdt-2\varphi(0,1)\int\limits_0^0\int\limits_0^1 g(s,t)dsdt+2\varphi(1,1)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 g(s,t)dsdt=$$

$$=\sup_{\|b\|_{l_{\bar r\bar s'}}=1}\Big(\int\limits_0^1\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^x\int\limits_0^y g(s,t)dsdt\Big)d\varphi(x,y)+\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^x\int\limits_0^1 g(s,t)dsdt\Big)d\varphi(x,1)+\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^1\int\limits_0^y g(s,t)dsdt\Big)d\varphi(1,y)+$$

$$+2\varphi(1,1)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 g(s,t)dsdt\Big).$$

Обозначим через $\bar g_{k_1k_2}=\sup\limits_{x\ge 2^{-k_1},\,y\ge 2^{-k_2}}\dfrac{1}{xy}\left|\int\limits_0^x\int\limits_0^y g(s,t)dsdt\right|$. Оценим сначала первое слагаемое. Используя лемму 2, неравенство Гельдера с параметрами $\dfrac{1}{s_1}+\dfrac{1}{s_1'}=1,\ \dfrac{1}{s_2}+\dfrac{1}{s_2'}=1$ и неравенство (3), получим

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\Big(\frac{1}{xy}\int\limits_0^x\int\limits_0^y g(s,t)dsdt\Big)xyd\varphi(x,y)=\sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{\infty}\Big|\int\limits_{2^{-k_2-1}}^{2^{-k_2}}\int\limits_{2^{-k_1-1}}^{2^{-k_1}}\frac{1}{xy}\Big(\int\limits_0^x\int\limits_0^y g(s,t)dsdt\Big)xyd\varphi(x,y)\Big|\le$$

$$\le\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\bar g_{k_1k_2}2^{-k_1-k_2}\int\limits_{2^{-k_2-1}}^{2^{-k_2}}\int\limits_{2^{-k_1-1}}^{2^{-k_1}}|\,d\varphi(x,y)\,|\le$$

$$\le\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}k_2^{\frac{s_2'}{r_2'}-1}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}k_1^{\frac{s_1'}{r_1'}-1}|\,\bar g_{k_1k_2}\,|^{s_1'}\right)^{\frac{s_2'}{s_1'}}\right)^{\frac{1}{s_2'}}\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}k_2^{\frac{s_2}{r_2}-1}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}k_1^{\frac{s_1}{r_1}-1}\left(2^{-k_1-k_2}\int\limits_{2^{-k_2-1}}^{2^{-k_2}}\int\limits_{2^{-k_1-1}}^{2^{-k_1}}|\,d\varphi(x,y)\,|\right)^{s_1}\right)^{\frac{s_2}{s_1}}\right)^{\frac{1}{s_2}}=$$

$$=\| g \|_{N_{\bar r'\bar s'}}\left(\sum_{k_2=0}^{\infty} k_2^{\frac{s_2}{r_2}-1}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} k_1^{\frac{s_1}{r_1}-1}\left(2^{-k_1-k_2}\int_{2^{-k_2-1}}^{2^{-k_2}}\int_{2^{-k_1-1}}^{2^{-k_1}} | d\varphi(x,y) |\right)^{s_1}\right)^{\frac{s_2}{s_1}}\right)^{\frac{1}{s_2}} \le$$

$$\le c \| b \|_{l_{\bar r\bar s'}}\left(\sum_{k_2=0}^{\infty} k_2^{\frac{s_2}{r_2}-1}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} k_1^{\frac{s_1}{r_1}-1}\left(2^{-k_1-k_2}\int_{2^{-k_2-1}}^{2^{-k_2}}\int_{2^{-k_1-1}}^{2^{-k_1}} | d\varphi(x,y) |\right)^{s_1}\right)^{\frac{s_2}{s_1}}\right)^{\frac{1}{s_2}}.$$

Теперь оценим второе слагаемое:

$$\left|\int_0^1\left(\int_0^1\int_0^x g(s,t)dsdt\right)d\varphi(x,1)\right| = \sum_{k_1=0}^{\infty}\left|\int_{2^{-k_1-1}}^{2^{-k_1}}\left(\int_0^1\int_0^x g(s,t)dsdt\right)d\varphi(x,1)\right| \le \sum_{k_1=0}^{\infty}\bar g_{k_1}(s,t)2^{-k_1}\int_{2^{-k_1-1}}^{2^{-k_1}} | d\varphi | \le$$

$$\le\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{-\frac{k_1}{r_1'}}\bar g_{k_1}\right)^{s_1'}\right)^{\frac{1}{s_1'}}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{-\frac{k_1}{r_1}}\int_{2^{-k_1-1}}^{2^{-k_1}} | d\varphi |\right)^{s_1}\right)^{\frac{1}{s_1}} \le \|g\|_{N_{r_1's_1'}}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{-\frac{k_1}{r_1}}\int_{2^{-k_1-1}}^{2^{-k_1}} | d\varphi |\right)^{s_1}\right)^{\frac{1}{s_1}} \le \|b\|_{l_{r_1s_1'}}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{-\frac{k_1}{r_1}}\int_{2^{-k_1-1}}^{2^{-k_1}} | d\varphi |\right)^{s_1}\right)^{\frac{1}{s_1}},$$

где $\bar g_{k_1} = \sup\limits_{x\ge 2^{-k_1}}\frac{1}{x}\left|\int_0^1\int_0^x g(s,t)ds\right|$.

Аналогично доказывается неравенство

$$\int_0^1\left(\int_0^1\int_0^y g(s,t)dsdt\right)d\varphi(1,y) \le \|b\|_{l_{r_2s_2'}}\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(2^{-\frac{k_2}{r_2}}\int_{2^{-k_2-1}}^{2^{-k_2}} | d\varphi |\right)^{s_2}\right)^{\frac{1}{s_2}}.$$

Четвертое слагаемое оценивается также с учетом вложения $N_{r's'}\subset N_{r'\infty}$ и неравенства (3):

$$\left|\int_0^1\int_0^1 g(s,t)dsdt\varphi(1,1)\right| \le |\varphi(1,1)|\cdot\|g\|_{N_{r'\infty}} \le c|\varphi(1,1)|\cdot\|g\|_{N_{r's'}} \le c|\varphi(1,1)|\cdot\|b\|_{l_{rs'}}.$$

Таким образом, объединив полученные оценки, имеем

$$\|\lambda\|_{l_{\bar r'\bar s}} \le \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} k_2^{\frac{s_2}{r_2}-1}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} k_1^{\frac{s_1}{r_1}-1}\left(2^{-k_1-k_2}\int_{2^{-k_2-1}}^{2^{-k_2}}\int_{2^{-k_1-1}}^{2^{-k_1}} | d\varphi(x,y) |\right)^{s_1}\right)^{\frac{s_2}{s_1}}\right)^{\frac{1}{s_2}} + \left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{-\frac{k_1}{r_1}}\int_{2^{-k_1-1}}^{2^{-k_1}} | d\varphi |\right)^{s_1}\right)^{\frac{1}{s_1}}\times$$

$$\times\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(2^{-\frac{k_2}{r_2}}\int_{2^{-k_2-1}}^{2^{-k_2}} | d\varphi |\right)^{s_2}\right)^{\frac{1}{s_2}} + |\varphi(1,1)|.$$

Теорема доказана.

References

1. *Steckin S.B.* On bilinear forms // DAN SSSR(N.S.). — 71. — 1950. — № 3. — P. 237–240.
2. *Hirshman I.I.* On multiplier transformations // Deke Math.J. — 26. — 1959. — №1. — P. 221–242.
3. *Edelstein S.L.* The boundedness of the convolution in $L_p(Z_m)$ and smoothness of the symbol of the operator // Math. notes. — 22. — 1977. — № 6. — P. 873–884.
4. *Birman M.S., Solomjak M.Z.* Quantitative analysis in Sobolev imbedding theorems and applications to spectral theory. — Kiev, 1974. — P. 5–189.
5. *Karadzhov G.E.* The trigonometric multiplier problem // Constructive function theory 81. — Publ. House Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 1983. — P. 82–86.
6. *Smailov E.S., Tleukhanova N.T.* Estimates of the number of integral convolution operator // Abstracts of the Scientific Conference «Boundary-value problems and spectral problems for differential equations». — Almaty, 1991. — P. 140.
7. *Tleukhanova N.T.* The trigonometric problem of multipliers // Modern problems of function theory and functional analysis. — Karaganda, 1988. — P. 129–134.
8. *Nursultanov E.D.* The coefficients of multiple Fourier series of space L_p // Izvestiya RAN. — 2000. — Vol. 64. — № 1. — P. 95–122.