УДК 519.6

О сходимости одной разностной схемы для сингулярной задачи Коши

On the convergence of a difference scheme for a singular Cauchy problem

Кусаинова Л.К., Оспанова А.Б.

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана
(E-mail: leili2006@mail.ru)

Шексіздікте сингулярлы бірінші реттік дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебінің айырымдық схемасының моделі зерттелген. Бұл схеманы анықтайтын бұрынырақ құрастырылған дискреттік A_n операторлар тізбегі қарастырылған. Схема шешімдері үшін жуықтау және жинақталу теоремалары дәлелденген.

A model of difference scheme for a numeric solution of Cauchy problem for first order differential equation with the singularity at infinity is studied. The sequence of earlier constructed discrete operators A_n which specify the difference scheme, is considered. Approximation and convergence theorems are proved on the solutions to the difference scheme.

В данной работе мы исследуем вопросы аппроксимации и сходимости на решениях одной приближенной схемы для сингулярной задачи Коши

$$\begin{cases} y' + \upsilon(t)y = z(t); \\ y(0) = \alpha, \end{cases} \tag{1}$$

где $\upsilon(t)$ — непрерывная на оси $I = [0,\infty)$ функция, поведение которой на бесконечности задается условиями

$$\lim_{t\to\infty} |\, y(t)| = \infty; \ \int_0^\infty \upsilon^{-2}(t)dt < \infty. \tag{2}$$

Известно, что задача (1) при этих условиях однозначно разрешима для произвольной непрерывной правой части (см. [1]).

Пусть $\dot{C}^l(I)$ $(l = 0,1,\ldots)$ — пространство l раз непрерывно дифференцируемых в I функций таких, что

$$y^{(k)}(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty \ (0 \le k \le l).$$

Положим $\dot{C}(I) = \dot{C}^0(I)$. Через $\dot{H}_\upsilon$ будем обозначать пополнение линейного многообразия

$$H = \{y \in \dot{C}^1(I) : \ \|y\|_{2,\upsilon} < \infty\}$$

по норме

$$\|y\|_{2,\upsilon} = \left[\int_0^\infty \left(|\, y''|^2 + |\,\upsilon(t)y\,|^2\right)dt\right]^{1/2}.$$

Задачу (1) мы исследуем в операторной форме как

$$Ay = f, \tag{3}$$

где оператор

$$Ay = \left(y' + \upsilon(t)y,\ y(0)\right) \tag{4}$$

рассматривается как оператор, действующий из X в F, где $X = \dot{H}_\upsilon$, $F = \dot{C}(I)\times R$. Для пары $f = (z,a) \in F$ норма

$$\|f;F\| = \sup_{t\ge 0} |\, z(t)| + |\, a\,| = \|z;\dot{C}(I)\| + |\, a\,|.$$

Для построения приближенной схемы (см. [2])

$$A_n = f_n \ \ (n \ge 1) \tag{5}$$

задачи (3), (4) рассмотрим вначале специальный оператор дискретизации $S : \dot{C}(I) \to c_0$, где c_0 — пространство сходящихся к нулю числовых последовательностей $(x_j)_{j\ge 0}$. Норма в c_0

$$\|x\|_{c_0} = \sup_{j\ge 0} |\, x_j\,|.$$

Зададим характеристический размер Отелбаева относительно функции $\upsilon^4(t)$, полагая

$$\mu(t)=\sup_{h>0}\left\{h\ :\ h^3\int_t^{t+h}\upsilon^4(\zeta)d\zeta\le 1\right\}.$$

Известно, что

$$h\int_t^{t+h}\upsilon^4(\zeta)d\zeta=1,\ \text{ если }\ h=\mu(t)\ \text{ (см. [3]).} \tag{6}$$

Поскольку $\lim_{t\to\infty}\mu(t)=0,$ то

$$M=\sup_{t\ge 0}\mu(t)<\infty.$$

Пусть $0<\varepsilon<1,$

$$\mu_k=\inf\{t>t_k\ :\ t=\mu(t)\}\ (k\ge 2),\ t_1=0;$$
$$T_\varepsilon=\inf_{t>0}\{t\ :\ \mu(t)\le\varepsilon\}>0.$$

Положим $t_{k+1}=t_k+\mu_k$ $(k\ge 1)$. Пусть m, $n>0$ — целые такие, что

$$n\ge m=\min\{k\ :\ t_{k+1}\ge T_\varepsilon\}.$$

Обозначим через $\overline{t_k}=(t_{ki})_{i=1}^n$ равномерную сетку на $\Delta_k=[t_k,t_{k+1})$:

$$t_{ki}=t_k+i\delta_k,\ \delta_k=\mu_k/n,\ \mu_k=\mu(t_k).$$

Пусть $\Delta_{ki}=[t_{ki-1},t_{ki})$ $(i=1,...,n)$, $t_{10}=0.$ Положим

$$Sy=(\overline{y},\tilde{y}),\ \tilde{y}=(y_{m+j})_{j\ge1},\ y_{m+j}=y(t_{m+j});$$
$$\overline{y}=(\overline{y}_1,...,\overline{y}_m),\ \overline{y}_k=(y_{ki})_{i=1}^n,\ y_{ki}=y(t_{ki}).$$

Будем говорить, что $|\upsilon(t)|$ удовлетворяет условию медленного изменения относительно своего характеристического размера, если существует такое $\beta>1,$ что

$$(U_1)\ \ \beta^{-1}<\tfrac{|\upsilon(\zeta)|}{|\upsilon(t)|}<\beta,\ \text{ как только }\ 0<\zeta-t<\mu(t).$$

Утверждение 1. Пусть $\upsilon(t)$ удовлетворяет условию (U_1). Тогда для любой функции $y\in\dot{C}^1(I)\cap H_\upsilon$ справедлива оценка

$$\left\|\tilde{y}^{(k)}\right\|_{c_0}\le\dot{c}_k\varepsilon^{k+\frac12}\left\|y;H_\upsilon\right\|,\ \ k=0,1, \tag{7}$$

где $\dot{c}_k>0$ не зависят от y.

Доказательство. Пусть $\zeta\in\Delta_k$. Тогда в силу (U_1), а также характеристического равенства (6)

$$\beta^{-1}<\mu_k\upsilon_k=\left(\mu_k^3\int_{\Delta_k}\upsilon_k^4d\zeta\right)^{1/4}<\beta. \tag{8}$$

Далее из известных неравенств вложения Соболева (см. [4]) $W_2^2[0,1]\to C^k[0,1]$ $(k=0,1)$ следует, что

$$\max_{\Delta_k}|y|\le c_0\mu_k^{3/2}\left[\int_{\Delta_k}|y''|^2\,d\zeta+\mu_4^{-4}\int_{\Delta_k}|y|^2\,d\zeta\right]^{1/2}\le$$
$$\le\tilde{c}_0\mu_k^{3/2}\left[\int_{\Delta_k}\left(|y''|^2+|\upsilon^2(\zeta)y|^2\right)d\zeta\right]^{1/2}; \tag{9}$$

$$\max_{\Delta_k}|y^{(1)}|\le\tilde{c}_1\mu_k^{1/2}\left(\int_{\Delta_k}\left(|y''|^2+|\upsilon^2(\zeta)y|^2\right)d\zeta\right)^{1/2}, \tag{10}$$

где $\tilde{c}_k=c_k(1+\beta^8)^{1/2}$, c_k — абсолютные постоянные. Оценки (7) нетрудно вывести из (9), (10).

Введем обозначения. Пусть l_2^m, $\overline{X}_k$, $\overline{F}_k$ $(k=1,...,m)$ — пространства векторов $\overline{a}=(a_1,...,a_m)\in R^m$, $\overline{x}_k=(x_{k1},...,x_{kn})\in R^n$, наделенные нормами

$$\left\|\overline{a};l_2^m\right\|=\left(\sum_{j=1}^m a_j{}^2\right)^{1/2};$$

$$\left\| \bar{x}_k \right\|_{c\varphi} = \left\| \bar{x}_k ; \bar{X}_k \right\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_k x_{ki}^2 \right)^{1/2} ;$$

$$\left\| \bar{x}_k \right\|_C = \left\| \bar{x}_k ; \bar{F}_k \right\| = \max_{1 \le i \le n} | x_{ki} | .$$

Здесь R^m (R^n) — m (n)-мерное арифметическое пространство. На n-ом шаге мы будем рассматривать приближающий оператор

$$A_n \; : \; X_n \times R \to F_n \times l_2^m ,$$

определенный через равенства

$$A_n(x,a) = \left(\bar{A}_1 \bar{x}_1, ..., \bar{A}_m \bar{x}_m ; G(x,a) \right), \tag{11}$$

где

$$x = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_m) \in \bar{X}_1 \times \bar{X}_2 \times ... \times \bar{X}_m \overset{def}{=} X_n ;$$

$$\left(\bar{A}_k \bar{x}_k \right)_i = \frac{x_{ki} - x_{k,i-1}}{\delta_k} + \upsilon_k x_{k,i-1} \; (i = 1,2,...,n); \tag{12}$$

$$x_{k0} = x_{k-1,n} \text{ при } 2 \le k \le m, \; x_{10} = 0; \tag{13}$$

$$G(x,a) = (a, x_{10}, ..., x_{m-1,0}) = \bar{x}_0 . \tag{14}$$

Пространство $F_n = \bar{F}_1 \times \bar{F}_2 \times ... \times \bar{F}_m$. Нормы

$$\left\| x; X_n \right\| = \left(\sum_{k=1}^{m} \left\| \bar{x}_k \right\|_{c\phi}^2 \right)^{1/2} ;$$

$$\left\| (x,a) \right\| = \left\| x; X_n \right\| + | a | ;$$

$$\left\| x; F_n \right\| = \max_{1 \le k \le m} \left\| \bar{x}_k \right\|_C ;$$

$$\left\| (x,\bar{a}) \right\| = \left\| x \right\|_C + \left\| \bar{a}; l_2^m \right\| .$$

Пусть $T_n \; : \; \dot{H}_\upsilon \to X_n$, $T_n' \; : \; F \to F_n$ — операторы «сужения», действующие согласно равенствам

$$T_n y = \left(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_m \right); \;\; \bar{y}_k = \bar{T}_k y = (y_{ki})_{i=1}^n ,$$

где $y_{ki} = y(t_{ki})$; $T_n'(z,a) = T_n z$.

Пусть далее $P' \; : \; R^{mn+m} \to R^{mn}$, $P'' \; : \; R^{mn+m} \to R^m$ — проекторы. Зададим приближенную схему уравнения (1), полагая на n-ом шаге

$$P'(A_n x) = T_n'(z,a); \tag{15}$$

$$P''(A_n x) = G(x,a). \tag{16}$$

Будем говорить, что приближенная схема (15), (16) аппроксимирует уравнение (1) на решении y^*, *если*

$$\left\| P' A_n (T_n y^*, y^*(0)) - T_n'(z, y(0)); F_n \right\| \to 0, \;\; n \to \infty.$$

Теорема 1. Пусть $\upsilon(t)$ удовлетворяет условию (U_1). Тогда: а) Уравнение (1) имеет решение $y^* \in \dot{C}^1 \cap \dot{H}_\upsilon$, если только $z(t) \in \dot{C}(I)$. b) Если $y^* \in \dot{C}^1 \cap \dot{H}_\upsilon$, то приближенная схема (15)–(16) аппроксимирует уравнение (1) на y^*.

Доказательство. Доказательство утверждения а) см. в [4].

b) Пусть $y = y^*$ — решение уравнения (1). Согласно (11)–(14)

$$P' A_n (T_n y^*, y(0)) = (\bar{A}_1 \bar{y}_1, ..., \bar{A}_m \bar{y}_m);$$

$$T_n'(z, y(0)) = T_n z, \;\; z = Ax.$$

Вначале оценим норму $\left\| \bar{A}_k \bar{y}_k - z_k \right\|_C$. В силу (8), (10) для любого $i = 1,2,...,n$

$$\left| \left(\frac{y_{ki} - y_{k,i-1}}{\delta_k} + \upsilon_k y_{k,i-1} \right) - \left(y_{ki}' + \upsilon_k y_{ki} \right) \right| \le$$

$$\le \left| \frac{1}{\delta_k} \int_{\Delta_{ki}} \left(y'(s) - y'_{ki} \right) ds \right| + \upsilon_k \left| \int_{\Delta_{ki}} y'(s) ds \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\delta_k} \int_{\Delta_{ki}} \left| \int_s^{t_{ki}} y''(\zeta) d\zeta \right| ds + \left(\upsilon_k \delta_k \right) \max_{\Delta_{ki}} | y' | \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n}} \mu_k^{1/2} \left(\int_{\Delta_{ki}} | y'' |^2 \, ds \right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{1}{n} \left(\upsilon_k \mu_k \right) \tilde{c}_1 \mu_k^{1/2} \left(\int_{\Delta_k} \left(| y'' |^2 \, ds + | \upsilon^2(\zeta) y |^2 \right) d\zeta \right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{M^{1/2}}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{\tilde{c}_1 \beta}{\sqrt{n}} \right) \left\| y^* \right\|_{2,\upsilon},$$

откуда следуют оценки

$$\left\| P' A_n (T_n y^*, y(0)) - T_n'(z, y(0)); F_n \right\| =$$

$$= \max_{1 \le k \le m} \left\| \overline{A}_k \overline{y}_k^* - \overline{z}_k \right\|_C \le \frac{\tilde{c}}{\sqrt{n}} \left\| y^* \right\|_{2,\upsilon}, \; \tilde{c} = M^{1/2} (1 + \tilde{c}_1 \beta n^{-1/2}).$$

Пусть $\left\{ x^{*n} \right\}_{n \ge 1}$ — последовательность решений уравнения

$$P' A_n (T_n y^*, y(0)) = T_n'(z, y(0)).$$

Будем говорить, что приближенная схема (15)–(16) сходится на y^*, если

$$\left\| x^{*n} - T_n y^*; X_n \right\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 2. Пусть $\upsilon(t)$ удовлетворяет условию (U_1), и пусть решение уравнения (1) $y^* \in \dot{C}^1 \cap \dot{H}_\upsilon$. Тогда приближенная схема (15)–(16) сходится на y^*.

Доказательство. Распишем равенство

$$A_n x = T_n (Ay), \quad x = x^{*n}, \quad y = y^*,$$

по блокам:

$$\overline{A}_k \overline{x}_k = \overline{T}_k (Ay), \quad \overline{x}_k = (x_{k1}, ..., x_{kn}) \; (k = 1, 2, ..., m).$$

Для каждого кортежа $\overline{x}_k = (x_{k1}, ..., x_{kn})$ имеем

$$\frac{x_{k1} - x_{k0}}{\delta_k} + \upsilon_k x_{k0} = y'_{k1} + \upsilon_k y_{k1}, \quad x_{k0} = y_{k0}.$$

Отсюда получим

$$\frac{x_{k1} - y_{k1}}{\delta_k} = y'_{k1} - \frac{y_{k1} - y_{k0}}{\delta_k} + \upsilon_k (y_{k1} - y_{k0}) =$$

$$= y'_{k1} - y'(\zeta_{k1}) + \upsilon_k \int_{\Delta_{k1}} y'(s) ds =$$

$$= \int_{\zeta_{k1}}^{t_{k1}} y''(s) ds + \upsilon_k \int_{\Delta_{k1}} y'(s) ds;$$

$$\frac{x_{k2} - x_{k1}}{\delta_k} + \upsilon_k x_{k1} = y'_{k2} + \upsilon_k y_{k2},$$

откуда следует

$$\frac{x_{k2} - y_{k2}}{\delta_k} = \left(y'_{k2} - \frac{y_{k2} - y_{k1}}{\delta_k} \right) - \frac{y_{k1} - x_{k1}}{\delta_k} +$$

$$+ \upsilon_k (y_{k2} - y_{k1} + y_{k1} - x_{k1}) =$$

$$= \int_{\zeta_{k2}}^{t_{k2}} y''(\zeta) d\zeta + \upsilon_k \int_{\Delta_{k2}} y'(\zeta) d\zeta + r_k \frac{x_{k1} - y_{k1}}{\delta_k},$$

где $t_{k2} < \zeta_{k2} < t_{k2} + \delta_k$, $r_k = 1 + \delta_k \upsilon_k$ и т.д. На i-ом шаге получаем ($t_{kj} < \zeta_{kj} < t_{kj} + \delta_k$, $1 \le j \le i$)

$$\frac{x_{ki}-y_{ki}}{\delta_k}=\int\limits_{\zeta_{ki}}^{t_{ki}} y''(\zeta)d\zeta+\upsilon_k\int\limits_{\Delta_{ki}} y'(\zeta)d\zeta+r_k\frac{x_{k,i-1}-y_{k,i-1}}{\delta_k}=$$

$$=\sum_{s=0}^{i-1} r_k^s\left(\int\limits_{\zeta_{k,i-s}}^{t_{k,i-s}} y''(\zeta)d\zeta+\upsilon_k\int\limits_{\Delta_{k,i-s}} y'(\zeta)d\zeta\right). \qquad (17)$$

Пусть $\tilde{r}_k=1+\delta_k\,|\,\upsilon_k\,|$. Применяя (17) и оценки (8), (10), получим

$$|\,x_{ki}-y_{ki}\,|\le\delta_k\tilde{r}_k^{i-1}\left(\int\limits_{\Delta_k}|\,y''(\zeta)\,|\,d\zeta+\upsilon_k\int\limits_{\Delta_k}|\,y'(\zeta)\,|\,d\zeta\right)\le$$

$$\le\delta_k\tilde{r}_k^{i-1}\mu_k^{1/2}\left[\left(\int\limits_{\Delta_k}|\,y''\,|^2\,d\zeta\right)^{1/2}+\tilde{c}_1(\upsilon_k\mu_k)\left(\int\limits_{\Delta_k}\left(|\,y''\,|^2+|\,\upsilon^2(\zeta)y\,|^2\right)d\zeta\right)^{1/2}\right]\le$$

$$\le 2\tilde{c}_1\beta^{-1}\mu_k^{1/2}\delta_k\tilde{r}_k^{i-1}\left(\int\limits_{\Delta_k}\left(|\,y''\,|^2+|\,\upsilon^2(\zeta)y\,|^2\right)d\zeta\right)^{1/2},$$

откуда нетрудно получить, что

$$\left\|\overline{x}_k-\overline{y}_k;\overline{X}_k\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}\delta_k\,|\,x_{ki}-y_{ki}\,|^2\le$$

$$\le\left(\frac{2\tilde{c}_1}{\beta}\right)^2\frac{\mu_k^4}{n^3}\int\limits_{\Delta_k}\left(|\,y''\,|^2+|\,\upsilon^2(\zeta)y\,|^2\right)d\zeta\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{r}_k^{2i}\le$$

$$\le\tilde{c}\,\frac{M^4}{n^2}\int\limits_{\Delta_k}\left(|\,y''\,|^2+|\,\upsilon^2(\zeta)y\,|^2\right)d\zeta, \qquad (18)$$

где $\tilde{c}=\beta e^{2/\beta}\left(2\tilde{c}_1\beta^{-1}\right)^2$. Из (18) легко увидеть, что

$$\left\|x-T_ny;X_n\right\|\le\tilde{c}^{1/2}\frac{M^2}{n}\left\|y\right\|_{2,\upsilon}.$$

References

1. *Naymark M.A.* Linear differential operators. — 2 pub. — M.: Nauka, 1969. — 528 p.
2. *Trenogin V.A.* Functional analysis. — 3 pub. — M.: PHYSMATLIT, 2002. — 488 p.
3. *Otelbaev M., Kussainova L.K.* Spectrum estimates for one class of differential operators // Collection of works of Inst. of mathem. NAN Ukraine Operators theory, differential equation and function theory. — 2009. — T. 6. — № 1. — P. 165–190.
4. *Ospanova A.B.* On the stability of one difference scheme for a singular Cauchy problem // Bulletin of KarSU. — № 2 (66). — 2012. — P. 86–91.